ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Soutien 17 : V.A. discrètes

Mardi 2 Mai

Exercice 1. Un insecte pond des oeufs. Le nombre d'oeufs pondus est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Chaque oeuf a une probabilité p d'éclore, indépendante des autres oeufs. Soit Z le nombre d'oeufs qui ont éclos.

(1) Pour $k, n \in \mathbb{N}^2$, calculer $P(Z = k|X = n)$
(2) En déduire la loi de Z.
(3) La variable aléatoire Z admet-elle une espérance? Si oui, la calculer.

Exercice 2. (Voyageurs indélicats) Dans une ville, le ticket de tram coûte 1 euro. La fréquence de contrôle est de $p \in]0; 1[$. Un voyageur un peu radin raisonne comme suit; il décide de ne pas payer son ticket jusqu'à la première amende (qui s'élève à 60 euros). Quelle doit être la fréquence de contrôle pour dissuader cette personne d'entreprendre cette pratique douteuse (on considère que si en moyenne l'économie de la personne est négative, celle-ci se comportera en individu civilisé).

Exercice 3. (Loi sans mémoire) Soit Y une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que Y est *sans mémoire* si, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$P(Y > n) > 0, \quad \text{et} \quad P_{(Y>n)}(Y > n + m) = P(Y > m).$$

(1) On suppose que Y suit une loi géométrique. Démontrer que Y est sans mémoire. Interpréter ce résultat en considérant une suite d'épreuves répétées.
(2) Réciproquement, on suppose que Y est sans mémoire. Démontrer que $P(Y > 0) = 1$ et qu'il existe $p \in]0; 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(Y > n) = (1 - p)^n$. En déduire que Y suit une loi géométrique.

Exercice 4. Trois joueurs lancent, chacun leur tour, un dé, puis recommencent dans le même ordre, jusqu'à ce qu'un joueur amène un 6. La partie s'arrête alors, le joueur qui a amené un 6 a gagné. Le dé est truque et la probabilité d'obtenir 6 est $p \in]0; 1[$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués lors de la partie.

(1) Quelle est la loi de X?
(2) Déterminer la probabilité de gain de chacun des trois joueurs.