
Soutien 2 : Suite récurrence

Mardi 15 Novembre

Exercice 1.

(1) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

- (a) Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
- (b) Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0?
- (c) On introduit, pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = (x - 1)e^x + 1$. En étudiant la fonction h , déterminer son signe. En déduire les variations de f .
- (d) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) - x = f(-x)$. En déduire le signe de $f(x) - x$.

(2) Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$

- (a) Montrer que tous les termes de la suite sont bien définis et que (u_n) est minorée (strictement) par 0.
- (b) Déterminer les variations de (u_n) .
- (c) Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ avec $\ell \geq 0$.
- (d) On suppose que $\ell > 0$. Montrer que c'est impossible.
- (e) Conclure.