
Soutien 4 : Dénombrement

Mardi 29 Novembre

Exercice 1. Séverus Rogue prépare une énigme¹ pour Harry, Hermione et Ron. Il veut disposer différentes bouteilles, en ligne, sur une petite console. Il dispose de 3 bouteilles identiques de Poison, de deux bouteilles (identiques) de vin d'ortie, d'une bouteille d'une potion permettant de passer à travers les flammes et d'une bouteille de polynectar.

- (1) Combien y a-t-il de dispositions possibles des 7 bouteilles?
- (2) Si il y a n_1 (resp. n_2, n_3, n_4) bouteilles de Poison (resp. vin, potion, polynectar), combien y a-t-il de dispositions possibles?

Exercice 2. On cherche à organiser une soirée de Noël. Le service traiteur retenu nous propose, afin d'élaborer un menu, de choisir les plats qui seront proposés aux convives parmi tout un panel de bonnes choses. Plus précisément, on veut créer un menu composé d'une entrée à choisir parmi 2, d'un plat à choisir parmi 3 et d'un dessert. Le traiteur propose une liste comprenant 8 entrées, 10 plats et 6 desserts.

- (1) Combien peut-on créer de menus différents ?
- (2) Seules la moitié des entrées de la liste conviennent aux végétariens et seulement 3 plats principaux n'ont pas nécessité la mise à mort d'un animal. Combien y a-t-il de menus offrant systématiquement une alternative végétarienne à chacun des convives?

Exercice 3. Une personne en état d'ébriété se déplace, en ligne droite, aléatoirement entre la sortie d'un bar et son domicile. À chaque instant, cette personne fait un pas vers l'avant ou un pas vers l'arrière. Son domicile se trouve à une distance de d pas (vers l'avant) du bar (mais la personne étant sérieusement atteinte, elle peut passer devant et continuer son chemin). Après n pas, peu importe où elle se trouve, cette personne s'écroule (dans la neige, pour donner une dimension plus dramatique au récit).

- (1) Combien y a-t-il de "chemins" différents correspondants aux n déplacements?
- (2) Parmi ces chemins, combien y en a-t-il qui reviennent exactement au bar?
- (3) En décomposant $n = a + b$ (où a est le nombre de déplacements vers l'avant et b le nombre de déplacements vers l'arrière), montrer que le nombre de chemins de n pas permettant à l'ivrogne de s'écrouler devant chez lui est $\binom{n}{\frac{n+d}{2}}$.

¹voir *Harry Potter à l'école des sorciers*, J.K. ROWLING, 1997.