ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Soutien 9 : Suites implicites

Mardi 31 Janvier

Exercice 1. On considère, pour $n \geq 3$, l'équation

$$(E_n) \qquad x^n + x^2 + 2x - 1 = 0.$$

(1) On introduit la fonction $f_n : x \mapsto x^2 + x^2 + 2x - 1$. Montrer que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans un intervalle J à déterminer. Quelles sont les variations de f^{-1}?

(2) Montrer alors que (E_n) possède une unique solution strictement positive, que l'on notera x_n. Montrer de plus que, pour tout $n \geq 3$,

$$0 < x_n < \frac{1}{2}.$$

(3) Montrer que (x_n) est croissante.

(4) En conclure que (x_n) converge vers un réel ℓ dont on donnera un encadrement.

(5) En utilisant un encadrement de x_n, montrer que x_n^n tend vers 0, si n tend vers $+\infty$.

(6) Conclure quant à la valeur de ℓ.

Exercice 2. Montrer que l'équation $x^{3n} + n^n x^n - 1 = 0$ admet une unique solution strictement positive, notée a_n. Montrer que $a_n < 1/n$ et en déduire la limite de la suite (a_n).

Exercice 3. (D'après **EDHEC 2000**) Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

(1) (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, notée u_n.
(b) Calculer u_1 et u_2.
(c) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n \in]0, \dfrac{2}{3}[$.

(2) (a) Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
(b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n).
(c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

(3) (a) Déterminer la limite de (u_n^n) lorsque n tend vers $+\infty$.
(b) Donner enfin la valeur de ℓ.