Cahier de Vacances. Niveau I

Ce premier cahier de vacances propose aux élèves qui ont eu des difficultés au cours de l'année de faire un premier point sur les notions abordées cette année et de s'entraîner en calcul.

1 Calcul de dérivées (Mieux vaut tard que jamais)

Donner l'expression des dérivées des fonctions suivantes, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

$f_1(x) = x + e^x$; $\quad f_2(x) = \sqrt{x} + 2x$; $\quad f_3(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$; $\quad f_4(x) = x^2 e^x$

$f_5(x) = x\ln(x) - x$; $\quad f_6(x) = (2x+3)^3$; $\quad f_7(x) = \left(\ln\left(x^2+1\right)\right)^n$; $\quad f_8(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}}$

$f_9(x) = \dfrac{x-e^x}{x}$; $\quad f_{10}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$; $\quad f_{11}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $\quad f_{12}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-x)^k}{k}$.

2 Récurrences, Sommes

Exercice 1. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 2. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}.$$

Exercice 3. On définit la suite (u_n) par $u_1 = 1$ et

$$u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}.$$

Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que $\sqrt{n} < u_n < \sqrt{n} + 1$. (On pourra utiliser également la quantité conjuguée.)

Exercice 4. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$

3 Matrices

Exercice 5. Déterminer toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} B = B \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Montrer que
$$\forall n \geqslant 0, \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$$
où
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad J^n = 4^{n-1} J$ où
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
et $B = A - 2I$. Calculer B^2 puis montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad A^n = 2^n Id + n2^{n-1} B$.

Exercice 9. (Pivot de Gauss et Inverse)

Montrer que la matrice P ci-dessous est inversible et déterminer son inverse
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. On considère un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, noté u dont la matrice dans la base canonique est notée A avec
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Déterminer le rang de A, le noyau $\mathrm{Ker}(u)$, l'image $\mathrm{Im}(u)$. L'endomorphisme est-il bijectif?

Exercice 11. (**Matrices et suites à récurrence linéaire d'ordre 2**).

On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer A^2. Expliciter α et β tel que $A^2 = \alpha A + \beta Id$
(2) Montrer par récurrence qu'il existe a_n et b_n tels $A^n = a_n A + b_n Id$
(3) Expliciter a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
(4) Montrer que a est une suite récurrente d'ordre 2 puis expliciter a_n en fonction de n.
(5) En déduire l'expression de b_n (on exprimera b_n en fonction de a_n et a_{n+1}).
(6) Déterminer tous les coefficients de la matrice A^n

4 Analyse

Exercice 12. On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0;+\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - \mathrm{e}\ln(x)$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7$$

Partie I : Etude de la fonction f

(1) (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'x)$ et $f''(x)$.
(b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.
(2) Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.
(3) Tracer la courbe représentative de f.
(4) (a) Etudier les variations de la fonction $u :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) - x$.
(b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Etude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \qquad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

(5) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
(6) (a) Etudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : [2;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) - x$.
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
(7) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.
(8) Ecrire un programme en Scilab qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.
(9) (a) Démontrer : $\quad \forall x \in [2;+\infty[, \qquad 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$
(b) En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} u_n.$
(c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Partie III : Étude d'intégrales généralisées

(10) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ converge et calculer cette intégrale. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge-t-elle?

Exercice 13. Pour tout entier n on note:

$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^n dx.$$

(1) (a) Former le tableau de variation sur [0,1] de $x \to xe^{-x^2}$.
(b) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}.$$

(c) Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+1}.$$

(b) En déduire la limite de I_n et celle de $n.I_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 14. (Suite récurrente et IAF)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ et on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Calcul de u_n par un programme informatique

Écrire un programme en `SciLab` qui demande un entier n à l'utilisateur puis qui affiche les valeurs de $u_0, u_1, \ldots, u_n$.

Étude de la fonction f

(1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
(2) Étudier f, préciser les limites aux bornes, puis dresser son tableau de variations.
(3) Montrer en particulier que $\mathcal{C}$ admet une asymptote Δ en $+\infty$, dont on donnera l'équation.
(a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x et de $f(x)$.
(b) Montrer que

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad f(x) \geq \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

(c) En déduire que

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(4) Montrer que $\sqrt{\frac{3}{4}} \geq \frac{1}{2}$. En déduire, en utilisant la Question 4(b), que :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Convergence de la suite (u_n)

(1) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

(2) Démontrer que que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |u_n - 1|.$$

(3) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |u_0 - 1|$$

(4) En déduire soigneusement que la suite (u_n) converge vers une limite à préciser.

5 Probabilités

☞ On encourage fortement tout étudiant à refaire l'ensemble des exercices des séances de soutien 14, 16 et 17 (voire aussi 4 et 5).

Exercice 15. Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes fleurit une fois par an. Pour chaque plante ,la première année, la probabilité de donner une fleur rose vaut $\frac{3}{4}$, la probabilité de donner une fleur blanche vaut $\frac{1}{4}$. Puis les années suivantes, pour tout entier naturel n non nul :

- si l'année n, la plante a donné une fleur rose, alors l'année $n+1$ elle donnera une fleur rose.
- si l'année n la plante a donné une fleur blanche, alors elle donnera l'année $n+1$ de façon équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche.

On désigne par n un entier naturel non nul. Pour une plante donnée, on note p_n, la probabilité de l'événement R_n "la plante donne une fleur rose la nième année".

(1) A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmético-géométrique qui vérifie :

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}$$

(2) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et de p_1 .

(3) Que vaut p_1 ? En déduire p_n , ainsi que la valeur de $\lim_{n\to+\infty} p_n$

(4) (a) Quelle est la probabilité pour que la plante ne donne que des fleurs roses pendant les n premières années ?

(b) Quelle est la probabilité pour que la plante ne donne que des fleurs blanches pendant les n premières années ?

Exercice 16. Soient a, b deux entiers strictement positifs. Une urne contient initialement a boules rouges et b boules blanches. On effectue une succession d'épreuves, chaque épreuve étant constituée des trois étapes suivantes :

- on pioche une boule au hasard dans l'urne,
- on replace la boule tirée dans l'urne,
- on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle qui vient d'être piochée

Après n épreuves, l'urne contient donc $a+b+n$ boules.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges qui ont été **ajoutées** dans l'urne (par rapport à la composition initiale) à l'issue des n premières épreuves.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera R_n l'événement "on pioche une boule rouge au n-ième tirage".

(1) Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X_n en fonction de n.

(2) (a) Recopier et compléter la fonction suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant x boules rouges et y boules blanches et qui retourne la valeur 0 si la boule est rouge et 1 si elle est blanche.

```
function res=tirage(x,y)
    r=rand();
    if ............... then
        res=0;
    else
        res=1;
    end
endfunction
```

(b) Recopier et compléter la fonction suivante, qui simule n tirages successifs dans une urne contenant initialement a boules rouges et b boules blanches (selon le protocole décrit ci-dessus) et qui retourne la valeur de X_n :

```
function Xn=experience(a,b,n)
    x=a;
    y=b;
    for k=1:n
        r=tirage(x,y);
        if r==0 then
            x=............
        else
            ..............
        end
    end
    Xn=...................
endfunction
```

(3) Déterminer la loi de X_1.

(4) Soient k et n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k+1), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=\ell) \quad \text{avec } \ell \notin \{k,k+1\}.$$

(5) En raisonnant par récurrence sur n, montrer que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0;n \rrbracket)$.
(On pourra utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\{(X_n=k)\}$ et la question précédente.)

© Bill Watterson.