ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

# Cahier de Vacances. Niveau II

Ce deuxième cahier de vacances propose des exercices de type concours classiques qu'un élève qui a bien compris le cours devrait arriver à faire sans trop de difficultés. On pourra s'inspirer du cours et des exercices déjà traites dans l'année.

## 1 Algèbre Linéaire

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et $I$ la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice $A$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices $M$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

**Partie A : Étude de la matrice $A$**

(1) Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.
(2) La matrice $A$ est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

**Partie B : Recherche d'une solution particulière**

On note pour tout $x \in ]-1,1[, \varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

(1) Justifier que la fonction $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
(2) En utilisant la formule de Taylor-Young pour $\varphi$ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel $\alpha$ non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

(3) On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.
(4) Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que $(P(C))^2 = A$. Expliciter alors une matrice $M$ telle que $M^2 = A$.

**Partie C : Résolution complète de l'équation**

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice $A$.

Dans cette partie, on pose: $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Soient $u,\ v$ et $w$ les vecteurs définis par: $\begin{cases} w = (1,0,1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$

(a) Calculer les vecteurs $v$ et $u$.
(b) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Déterminer la matrice représentative de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.
(d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.

(2) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que $N$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

où $a, b$ et $c$ sont trois réels.

(b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : $N_1$ et $N_2$.

(3) Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de $P, P^{-1}, N_1$ et $N_2$.

(4) L'ensemble $E$ des matrices $M$ appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?

# 2 Étude de fonction

Soit $p$ un paramètre, élément de $[0;1]$. On pose, pour tout $x \in [0,1[,\ f(x) = p\ln(1+x) + (1-p)\ln(1-x)$.

(1) **Étude de** $f$.

(a) Étudier les variations de $f$ sur $]0,1[$, et montrer que $f$ est concave.
Montrer que $f$ admet un maximum sur $]0,1[$, atteint en un unique réel $\alpha_K$ que l'on exprimera en fonction de $p$.
(b) Déterminer la limite de $f$ en 1.
(c) Montrer que $f$ s'annule deux fois exactement sur $[0,1[$ : en 0 et en un réel $\alpha_c$ vérifiant $\alpha_K < \alpha_c$.
(d) Donner l'allure de la courbe représentative de $f$ sur $[0,1[$.

☞ On considèrera dans ce qui suit que $\alpha$, est une fonction de $p$ (on écrira ainsi $\alpha_c(p)$).

(2) On définit la fonction $\varphi$ sur $]0,1[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

(a) Montrer que $\varphi$ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0,1]$ On notera encore $\varphi$ ce prolongement.
(b) Justifier que $\varphi$ est dérivable sur $]0,1[$, et mettre l'expression de sa dérivée sous la forme

$$\varphi'(x) = \frac{h(x)}{(1-x^2)\left[\ln(1-x)\right]^2}.$$

(c) Déterminer les variations de $h$ sur $]0,1[$.
(d) Montrer que $\varphi$ réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle à préciser.

(3) Montrer que $\varphi$ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 1$. On pourra utiliser le développement limité en 1 à l'ordre 2 de la fonction ln:

$$\ln(x) = (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2).$$

(4) (a) Établir que

$$\forall p \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[, \quad \alpha_c(p) = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

(b) En déduire que $\alpha_c$, est prolongeable par continuité en $\frac{1}{2}$, que ce prolongement est dérivable en $\frac{1}{2}$ et que :

$$\alpha_c'\left(\frac{1}{2}\right) = 4.$$

(c) Montrer que

$$\lim_{p \to \frac{1}{2}} \frac{\alpha_c}{2\alpha_K} = 1.$$

# 3 Probabilités continues

On considère deux variables aléatoires $X$ et $Y$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et indépendantes. On suppose que $X$ est une variable à densité et on note $F_X$ sa fonction de répartition. On suppose par ailleurs que la loi de $Y$ est donnée par

$$P(Y=1) = P(Y=-1) = \frac{1}{2}.$$

L'indépendance de $X$ et $Y$ se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel $x$,

$$P([X \leq x] \cap [Y=1]) = P(X \leq x)\, P(Y=1)$$

et

$$P([X \leq x] \cap [Y=-1]) = P(X \leq x)\, P(Y=-1).$$

On pose $Z = XY$ et on admet que $Z$ est, elle-aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On se propose d'établir deux résultats utiles pour la suite dans la partie 1, puis d'en déduire la loi de la variable aléatoire $Z$ en fonction de la loi de $X$ dans les parties 2 et 3.

**Partie 1 : Expression de la fonction de répartition de $Z$ en fonction de celle de $X$.**

(1) Rappeler l'expression des fonctions de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a,b]$ (avec $a < b$) et d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ (avec $\lambda > 0$).
(2) En utilisant le système complet d'événements $\{(Y=1),(Y=-1)\}$, montrer que la fonction de répartition $F_Z$ de la variable aléatoire $Z$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \frac{1}{2}\left(F_X(x) - F_X(-x) + 1\right).$$

**Partie 2 : Étude de deux premiers exemples.**

(1) On suppose que la loi de $X$ est la loi normale centrée réduite.
Reconnaître la loi de $Z$.
(2) On suppose que la loi de $X$ est la loi uniforme sur $[0,1]$.
(a) Déterminer l'expression de $F_X(-x)$ selon les valeurs prises par $x$.
(b) Déterminer $F_Z(x)$ pour tout réel $x$, puis reconnaître la loi de $Z$.

**Partie 3 : Étude du cas où la loi de $X$ est la loi exponentielle de paramètre 1.**

(1) (a) Montrer que la fonction de répartition $F_Z$ de la variable aléatoire $Z$ est définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{x}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(b) En déduire que $Z$ est une variable aléatoire à densité.

(c) Établir alors qu'une densité de $Z$ est la fonction $f_Z$ définie pour tout réel $x$ par

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

(d) Donner la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx.$$

(e) Montrer que $f_Z$ est une fonction paire et en déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$.

(2) (a) Donner la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx.$$

(b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de $Z$.

(3) (a) Déterminer $E(X)E(Y)$ et comparer avec $E(Z)$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

(b) Exprimer $Z^2$ en fonction de $X$, puis en déduire de nouveau la variance de $Z$.

(4) Soit $U$ et $V$ des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et la loi uniforme sur $[0, 1[$.

(a) On pose $Q = -\ln(1 - V)$ et on admet que $Q$ est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de $Q$ et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire $Q$.

(b) On pose $R = 2U - 1$ et on admet que $R$ est une variable aléatoire. Déterminer $R(\Omega)$ et donner la loi suivie par la variable $R$.

(c) Informatique.
En tenant compte des résultats des questions 5a) et 5b), écrire en `SciLab` une déclaration de fonction dont l'entête est `function y=Z()` pour qu'elle simule la loi de $Z$.

# 4 Probabilités discrètes

On désigne par $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de $n$ urnes, numérotées de 1 à $n$, contenant chacune $n$ boules. On répète $n$ épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.
Pour tout $i$ de $\{1, 2, ..., n\}$ , on note $X_i$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée $i$ contient toujours $n$ boules au bout de ces $n$ épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

(1) (a) Pour tout $i$ et tout $k$, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement "l'urne numéro $i$ est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve".
Ecrire l'événement $(X_i = 1)$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$, puis montrer que

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}\,,\ P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

(b) Justifier également que, si $i$ et $j$ sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on a

$$P\left([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\right) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

(c) Comparer $\left(1-\dfrac{2}{n}\right)$ et $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si $i$ et $j$ sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, alors les variables $X_i$ et $X_j$ en sont pas indépendantes.

(2) On pose $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i$.

(a) Déterminer l'espérance de $Y_n$, notée $E(Y_n)$.

(b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque $n$ est au voisinage de $+\infty$.

(3) Pour tout $i$ de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $N_i$ la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée $i$ à la fin de ces $n$ épreuves.

(a) Donner sans calcul la loi de $N_i$ ainsi que la valeur de $E(N_i)$.

(b) Que vaut le produit $N_i X_i$ ?

(c) Les variables $N_i$ et $X_i$ sont-elles indépendantes ?

(4) Recopier et compléter le programme SciLab suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par $X_1$ et $N_1$ pour une valeur de $n$ entrée par l'utilisateur.

```
n=input('Entrez un entier supérieur ou égal à 2: ');
n1=0; x1=1;
for k=1:n
    hasard=.......................;
    if hasard==1 then
        x1=.......................;
        n1=.......................;
    end
end
disp(n1,x1)
```