ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°1

Durée: 4 heures

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées**. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1. Soit p un entier naturel fixé. On considère les suites (u_n) et (S_n) définies, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

(1) **Question préliminaire**

On considère la suite (H_n) définie, pour tout entier $n \geq 1$, par $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Montrer que (H_n) est croissante.

(b) Vérifier que pour tout entier k tel que $n+1 \leq k \leq 2n$, on a

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n}.$$

En déduire que

$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

(c) Montrer par l'absurde, à l'aide de l'inégalité précédente, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.

(2) **Premier cas particulier**. Dans cette question seulement, on suppose que $p = 0$. Que vaut u_n? Quelle est la nature de la suite (S_n)?

(3) **Second cas particulier**. Dans cette question seulement, on suppose que $p = 1$. Que vaut u_n? À l'aide de la question préliminaire, déterminer la nature de la suite (S_n).

(4) **Cas général.** Dans toute la suite, on suppose que $p \geq 2$.

(a) Recopier et compléter la fonction suivante prenant en argument un entier $n \geq 1$ et un entier $p \geq 2$ et renvoyant S_n

```
function y=exo2(n,p)
    u=zeros(1,n);
    for k=1:n
        u(k)=prod(1:k)/prod(..................);
    end
    y=..........................
endfunction
```

(b) Montrer, par un calcul direct, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$.
(c) En déduire par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que

$$S_n = \frac{1-(n+p+1)u_{n+1}}{p-1}.$$

(d) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (n+p)u_n$. Montrer que (v_n) est décroissante.
(e) Montrer que (v_n) converge vers une limite ℓ avec $\ell \geq 0$.
(f) En déduire que (S_n) converge et exprimer sa limite en fonction de p et de ℓ.
(g) On suppose que $\ell > 0$.
   (i) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ell/n} = 1.$$

   (ii) En déduire qu'il existe un certain rang N_1 tel que, pour tout entier $n \geq N_1$,

$$u_n \geq \frac{\ell}{2n}.$$

   (iii) Utiliser alors la question préliminaire pour obtenir une contradiction et conclure que $\ell = 0$.

(h) Que vaut alors, en fonction de p, la limite de la suite (S_n)?

Exercice 2. Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$.

On considère la matrice M et N définies par: $M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$.

(1) (a) Calculer N^2.
   (b) Démontrer que pour tout entier $k \geq 1$, il existe un réel u_k tel que $N^k = u_k \cdot N$.
   (c) Déterminer u_k puis N^ken fonction de k. Cette formule est-elle valable pour $k = 0$?

(2) Déterminer des réels x et y tels que $M = x.N + y.I$ où I est la matrice unité d'ordre 4.
(3) En déduire pour tout entier $n, n \geq 1$,la valeur de M^n en fonction de I, de N et de n. On montrera que

$$M^n = (a-b)^n I + \frac{(a+3b)^n - (a-b)^n}{4b} N.$$

Exercice 3. Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité 2/3.
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité 1/2.
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité 1/2.
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité 1/3.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie.
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}.$$

(1) On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.

   (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n).$$

   (b) Exprimer de la même façon les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.

(c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$.

Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$, où $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$.

(2) On introduit les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.
(b) Justifier que $D = P^{-1}MP$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

(3) (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}$.
(b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geqslant 2, \quad U_n = M^{n-2}U_2$.
(c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, déduire des questions précédentes les expressions de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$ en fonction de n.
(d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(F_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(G_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}$$

Exercice 4. Pour cet exercice, on donne les approximations suivantes

$$\ln(2) \approx 0,69 \qquad \ln(3) \approx 1,10 \qquad 22\ln(2) - 14 \approx 1,25$$

et

$$22\ln(3) - 23 \approx 1,17 \qquad \frac{1}{22\ln(2) - 14} \approx 0,80 \qquad \frac{1}{22\ln(3) - 23} \approx 0,86.$$

Préliminaire : un polynôme et une étude de signe

Soit $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

(1) Vérifier que $P(1) = 0$. En déduire une factorisation de P.
(2) Justifier que, pour $x \in \mathbb{R}, P(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{3x} - 6\mathrm{e}^{2x} + 11\mathrm{e}^x - 6$.
(3) Justifier qu'on a l'égalité :

$$2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22 - 12\mathrm{e}^{-x} = \frac{2(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - 2)(\mathrm{e}^x - 3)}{\mathrm{e}^x}.$$

(4) Résoudre $\mathrm{e}^x - 3 > 0$ sur $\mathbb{R}$.
(5) Déduire des questions précédentes le signe, pour $x \in \mathbb{R}$ de

$$2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22 - 12\mathrm{e}^{-x}.$$

Partir I - Étude d'une fonction

On pose $v : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^{x} + 22x + 12\mathrm{e}^{-x}$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$.

(1) **Étude de v**
  (a) Calculer les valeurs exactes de $v(\ln(2))$ et de $v(\ln(3))$ en détaillant vos calculs.
  (b) A l'aide des résultats préliminaires, dresser le tableau de variation complet de la fonction v.
  (c) En déduire que $v(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

(2) Quel est l'ensemble de définition de h ?
(3) Dresser le tableau de variation complet de h.

Partie II - Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$.

(1) Calculer u_1 et justifier que $u_2 \leq 1$.
(2) Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \geq 0$, $u_n \in [\ln(2); \ln(3)]$.
(3) Démontrer que (u_n) est décroissante pour $n \geq 1$.
(4) Montrer alors que (u_n) converge vers une limite ℓ, avec $\ln(2) \leq \ell \leq \ln(3)$.
(5) Recopier et compléter le programme `SciLab` pour qu'il représente graphiquement les `n` premiers termes de la suite (u_n) où `n` est rentrée par l'utilisateur

```
function y=h(x)
    y=.................................
endfunction

n=input('n=?');
u=zeros(1,...............)
for .............................
      ................................
end

disp(0:n, u, -1)
```

(6) À l'exécution du programme précédent avec `n=25`, `SciLab` affiche le graphique ci-dessous. En déduire une approximation à 10^{-2} de la solution de l'équation $\ell \times v(\ell) = 1$.