Concours Blanc n°1

Solution

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées**. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1. Soit p un entier naturel fixé. On considère les suites (u_n) et (S_n) définies, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

(1) **Question préliminaire**

On considère la suite (H_n) définie, pour tout entier $n \geq 1$, par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Il est clair que

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0,$$

et que la suite (H_n) est (strictement) croissante.

(b) Soit k compris entre $n+1$ et $2n$. Par décroissance de la fonction inverse on a

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}.$$

Or, comme

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k};$$

l'encadrement précédent donne

$$H_{2n} - H_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} 1 = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

(c) La suite (H_n) est croissante. Supposons qu'elle ne diverge pas vers $+\infty$, elle est donc convergente vers une limite ℓ (application du théorème de convergence monotone). Mais (H_{2n}) converge également vers ℓ donc

$$H_{2n} - H_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$$

ce qui est contradictoire avec le fait que cette différence est toujours supérieure ou égale à $1/2$. Ainsi,

$$\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty.$$

(2) **Premier cas particulier**. Si $p = 0$, alors $\binom{n}{n} = 1$ et (u_n) est constante égale à 1. Il suit que $S_n = 1 + 1 + ... + 1 = n$ et diverge vers $+\infty$.

(3) **Second cas particulier**. Si $p=1$, alors $u_n = 1/\binom{n+1}{n} = 1/(n+1)$. Il suit alors que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = H_{n+1} - 1.$$

Or, on sait que (H_n) diverge vers $+\infty$ par la question préliminaire. Il suit donc que c'est également le cas pour (S_n).

(4) **Cas général.** Dans toute la suite, on suppose que $p \geq 2$.

(a) On complète, sans difficulté, la fonction suivante permettant le calcul de S_n

```
function y=exo2(n,p)
    u=zeros(1,n);
    for k=1:n
        u(k)=prod(1:k)/prod(p+1:p+k);
    end
    y=sum(u)
endfunction
```

(b) Par définition, on a

$$\begin{aligned}(n+p+2)u_{n+2} &= \frac{n+p+2}{\binom{n+2+p}{n+2}} = \frac{(n+p+2)(n+2)!p!}{(n+p+2)!} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)!p!}{(n+p+1)!} \\ &= \frac{n+2}{\binom{n+p+1}{n+1}} \\ &= (n+2)u_{n+1}.\end{aligned}$$

(c) On procède donc, comme l'énoncé le demande, par récurrence

- <u>initialisation:</u> pour $n=1$, on a $S_1 = u_1 = 1/\binom{p+1}{1} = 1/p+1$ et, en utilisant la question précédente,

$$\frac{1-(1+p+1)u_2}{p-1} = \frac{1-(p+2)u_2/}{p-1} = \frac{1-2u_1}{(p-1)} = \frac{\frac{(p+1)-2}{p+1}}{p-1} = \frac{1}{p+1}$$

et l'égalité est bien vraie pour $n=1$.

- <u>hérédité:</u> supposons, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, que

$$S_n = \frac{1-(n+p+1)u_{n+1}}{p-1}.$$

Il suit que

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + u_{n+1} = \frac{1-(n+p+1)u_{n+1}}{p-1} + u_{n+1} \\ &= \frac{1}{p-1} - \left(\frac{(n+p+1)}{p-1} - 1\right) u_{n+1} \\ &= \frac{1}{p-1} - \frac{(n+2)}{p-1} u_{n+1} \\ &= \frac{1}{p-1} - \frac{(n+p+2)u_{n+2}}{p-1} \\ &= \frac{1-(n+1+p+1)u_{n+2}}{p-1}, \end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(d) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (n+p)u_n$. On calcule la différence de deux termes consécutifs:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{n+1+p}{\binom{n+p+1}{n+1}} - \frac{n+p}{\binom{n+p}{n}} \\ &= \frac{(n+p+1)p!(n+1)!}{(n+p+1)!} - \frac{(n+p)p!n!}{(n+p)!} \\ &= \frac{p!n!}{(n+p)!} \left((n+1) - (n+p)\right) \\ &= \frac{p!n!}{(n+p)!} (1-p) \\ &< 0 \end{aligned}$$

car $p \geq 2$ et la suite (v_n) est bien décroissante.

(e) Tous les termes de la suite (v_n) sont clairement positifs, la suite est donc minorée par 0 et décroissante; par le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite ℓ. Comme tous les termes de la suite sont positifs, par passage à la limite, on a également $\ell \geq 0$.

(f) D'après la Question 4c, on a

$$S_n = \frac{1-(n+p+1)u_{n+1}}{p-1} = \frac{1-v_{n+1}}{p-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1-\ell}{p-1}.$$

(g) On suppose que $\ell > 0$.

(i) Comme $\ell \neq 0$, on peut diviser par ℓ/n. On a, de manière plus ou moins astucieuse,

$$\frac{u_n}{\ell/n} = \frac{(n+p)u_n}{\ell} \times \frac{n}{n+p}.$$

Or,

$$\frac{(n+p)u_n}{\ell} = \frac{v_n}{/ell} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell} = 1$$

et

$$\frac{n}{n+p} = \frac{1}{1+p/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

ce qui donne bien la limite attendue.

(ii) Si $u_n/(\ell/n)$ tend vers 1, il existe un rang N_1 à partir duquel le quotient dépasse 1/2, *I.e*, pour tout $n \geq N_1$

$$\frac{u_n}{(\ell/n)} \geq \frac{1}{2} \iff u_n \geq \frac{\ell}{2n}.$$

(iii) D'après la question précédente, on a donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{N_1-1} u_k + \sum_{k=N_1}^{n} u_k \\ &\geq \sum_{k=N_1}^{n} u_k \qquad\qquad \text{(car } u_k \geq 0\text{)} \\ &\geq \frac{\ell}{2}\sum_{k=N_1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{\ell}{2}\left(H_n - H_{N_1-1}\right) \end{aligned}$$

Or, H_{N_1-1} est une constante (par rapport à n) et $H_n \to +\infty$. Par comparaison des suites à termes positifs, on a alors que $S_n \to +\infty$ ce qui contredit la convergence de (S_n) obtenue ci-avant. Il suit que $\ell = 0$.

(h) Au final, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{p-1}.$$

Exercice 2. Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$.

On considère la matrice M et N définies par: $M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$.

(1) (a) On constate que

$$N^2 = \begin{pmatrix} 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \\ 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \\ 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \\ 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \end{pmatrix} = 4bN.$$

(b) On procède par récurrence.

- <u>initialisation:</u> pour $n = 1$, il suffit naturellement de prendre $u_1 = 1$.
- <u>hérédité:</u> supposons qu'il existe un réel u_k tel que, $N^k = u_k N$, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$N^{k+1} = N^k \cdot N = u_k N \cdot N = u_k N^2 = u_k \times 4bN.$$

En prenant $u_{k+1} = 4bu_k$, on a bien le résultat souhaité.

(c) La suite (u_k) ainsi construite est géométrique, de raison $4b$ et de premier terme $u_1 = 1$, on en déduit que

$$u_k = (4b)^{k-1}u_1 = (4b)^{k-1}$$

ce qui permet d'affirmer que

$$N^k = (4b)^{k-1}N = \begin{pmatrix} 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k \\ 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k \\ 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k \\ 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k \end{pmatrix}.$$

Pour $k = 0$, $N^k = I$ et la formule n'est pas valide.

(2) Il est clair que $bx + y = a$ et $bx = b$ donc $x = 1$ et $y = a - b$.

(3) On a $M^n = (N+(a-b)I)^n$. Or, les matrices N et $(a-b)I$ commutent car tout multiple de l'identité commute avec toute matrice. On peut donc appliquer la formule du binôme, qui donne

$$\begin{aligned}
M^n &= (N+(a-b)I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k((a-b)I)^{n-k} \\
&= (a-b)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} N^k \\
&= (a-b)^n I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (4b)^{k-1} \right) N \\
&= (a-b)^n I + \frac{1}{4b} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (4b)^{k} - (a-b)^n \right) N \\
&= (a-b)^n I + \frac{1}{4b} \left((a+3b)^n - (a-b)^n \right) N
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

Exercice 3. Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $2/3$.
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $1/2$.
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $1/2$.
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $1/3$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie.
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}.$$

(1) On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.

(a) Soit $n \geq 2$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e (E_n, F_n, G_n, H_n), on a

$$P(E_{n+1}) = P_{E_n}(E_{n+1})P(E_n) + P_{F_n}(E_{n+1})P(F_n) + P_{G_n}(E_{n+1})P(G_n) + P_{H_n}(E_{n+1})P(H_n)$$

Or, $E_{n+1} = A_n \cap A_{n+1}$ donc $P_{G_n}(E_{n+1}) = 0$ et $P_{H_n}(E_{n+1}) = 0$. Par ailleurs, d'après les données du texte, si le joueur gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $2/3$ ce qui veut dire que $P_{E_n}(E_{n+1}) = 2/3$ et s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $1/2$ ce qui donne $P_{F_n}(E_{n+1}) = 1/2$. Au final,

$$\begin{aligned}
P(E_{n+1}) &= P_{E_n}(E_{n+1})P(E_n) + P_{F_n}(E_{n+1})P(F_n) + P_{G_n}(E_{n+1})P(G_n) + P_{H_n}(E_{n+1})P(H_n) \\
&= \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n).
\end{aligned}$$

(b) Le même raisonnement (formule des probabilités totales et interprétation des données du texte sur le déroulement de parties consécutives) permet d'obtenir les relations de récurrence

$$\begin{aligned}
P(F_{n+1}) &= P_{E_n}(F_{n+1})P(E_n) + P_{F_n}(F_{n+1})P(F_n) + P_{G_n}(F_{n+1})P(G_n) + P_{H_n}(F_{n+1})P(H_n) \\
&= \frac{1}{2}P(G_n) + \frac{1}{3}P(H_n),
\end{aligned}$$

$$P(G_{n+1}) = \frac{1}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$$

et

$$P(H_{n+1}) = \frac{1}{2}P(G_n) + \frac{2}{3}P(H_n).$$

(c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$.

Il est clair, d'après les deux questions précédentes que $U_{n+1} = MU_n$, où

$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(2) On introduit les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) On constate que

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

ce qui permet d'affirmer que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{10}Q$.

(b) On fait le calcul explicite

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{10}QMP \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1/3 & 1 & -1 & -1/3 \\ 1/3 & -1/2 & -1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -10/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et la matrice D est bien diagonale.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

(3) (a) Petite récurrence classique qu'on a déjà faite 274 fois.

- <u>initialisation:</u> pour $n = 0$, on a bien $M^n = I = PIP^{-1} = I$.

- hérédité: supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $M^n = PD^nP^{-1}$. Mais alors
$$M^{n+1} = M^n \cdot M = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^n \cdot DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1},$$
ce qui est bien ce qu'on attendait.

(b) On sait que, pour tout $n \geq 2$, on a $U_{n+1} = MU_n$. Utilisons ceci dans la récurrence

- initialisation: pour $n = 2$, on a bien $U_2 = M^0U_2$ car $M^0 = I$.

- hérédité: supposons que, pour un certain entier $n \geq 2$, on ait $U_n = M^{n-2}U_2$. Alors,
$$U_{n+1} = MU_n = M \cdot M^{n-2}U_2 = M^{n-1}U_2,$$
ce qui est bien la propriété au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(c) Comme le joueur gagne les deux premières parties, il est clair que
$$U_2 = \begin{pmatrix} P(E_2) \\ P(F_2) \\ P(G_2) \\ P(H_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
De plus, on a vu, dans les questions précédentes, que
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix} &= U_n = M^{n-2}U_2 \\
&= PD^{n-2}P^{-1}U_2 \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1/3)^{n-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/6)^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1/3)^{n-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/6)^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(-1/3)^{n-2} \\ 2(1/6)^{n-2} \\ (1/2)^{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$
Il suit que
$$\begin{aligned}
P(E_n) &= \frac{2(1/6)^{n-2} - (-1/3)^{n-2} + 3(1/2)^{n-1} + 3}{10} \\
P(F_n) &= \frac{-1(1/6)^{n-2} - 2(-1/3)^{n-2} - (1/2)^{n-1} + 2}{10} \\
P(G_n) &= \frac{-1(1/6)^{n-2} + 2(-1/3)^{n-2} + (1/2)^{n-1} + 2}{10} \\
P(H_n) &= \frac{(1/6)^{n-2} - (-1/3)^{n-2} - 3(1/2)^{n-1} + 3}{10}
\end{aligned}$$

(d) On déduit de la question précédente, sachant que $(1/6)^{n-2}$, $(-1/3)^{n-2}$ et $(1/2)^{n-1}$ sont des quantités qui tendent vers 0 que

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(F_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(G_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}.$$

Exercice 4. Pour cet exercice, on donne les approximations suivantes

$$\ln(2) \approx 0,69 \qquad \ln(3) \approx 1,10 \qquad 22\ln(2) - 14 \approx 1,25$$

et

$$22\ln(3) - 23 \approx 1,17 \qquad \frac{1}{22\ln(2)-14} \approx 0,80 \qquad \frac{1}{22\ln(3)-23} \approx 0,86.$$

Préliminaire : un polynôme et une étude de signe

Soit $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

(1) On voit qu'en effet $P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$. Ainsi 1 est racine de $P(X)$ et $X - 1$ divise donc $P(X)$. En posant la division euclidienne, on trouve

$$P(X) = (X-1)(X^2 - 5X + 6) = (X-1)(X-2)(X-3)$$

où on a factorisé le polynôme de degré 2 *via* calcul implicite de son discriminant.

(2) On évalue le polynôme $P(X)$ en e^x. On trouve bien

$$P(e^x) = (e^x)^3 - 6(e^x)^2 + 11e^x - 6 = e^{3x} - 6e^{2x} + 11e^x - 6.$$

(3) D'après la factorisation précédente, on a

$$P(e^x) = (e^x)^3 - 6(e^x)^2 + 11e^x - 6 = e^{3x} - 6e^{2x} + 11e^x - 6 = (e^x - 1)(e^x - 2)(e^x - 3).$$

En multipliant tout par 2 et en divisant par e^x, on obtient

$$2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22 - 12\mathrm{e}^{-x} = \frac{2\left(\mathrm{e}^x - 1\right)\left(\mathrm{e}^x - 2\right)\left(\mathrm{e}^x - 3\right)}{\mathrm{e}^x}.$$

(4) Il est clair que $e^x - 3 > 0 \iff e^x > 3 \iff x > \ln(3)$.

(5) La factorisation ci-dessus permet de dresser le tableau de signe de l'expression $A(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22 - 12\mathrm{e}^{-x}$

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$e^x - 2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Partir I - Étude d'une fonction

On pose $v : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22x + 12\mathrm{e}^{-x}$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$.

(1) **Étude de** v

(a) On calcule, avec le plus grand des plaisirs

$$\begin{aligned}
v(\ln(2)) &= e^{2\ln(2)} - 12e^{\ln(2)} + 22\ln(2) + 12e^{-\ln(2)} \\
&= e^{\ln(4)} - 12e^{\ln(2)} + 22\ln(2) + 12e^{\ln(1/2)} \\
&= 4 - 24 + 22\ln(2) + 6 \\
&= 22\ln(2) - 14
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(\ln(3)) &= e^{2\ln(3)} - 12e^{\ln(3)} + 22\ln(3) + 12e^{-\ln(3)} \\
&= e^{\ln(9)} - 12e^{\ln(3)} + 22\ln(3) + 12e^{\ln(1/3)} \\
&= 9 - 36 + 22\ln(3) + 4 \\
&= 22\ln(3) - 23
\end{aligned}$$

(b) La fonction v est une combinaison d'exponentielles définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, on voit que

$$v'(x) = 2e^{2x} - 12e^{x} + 22 - 12e^{-x} = A(x)$$

et on connait le signe de la quantité $A(x)$ d'après la partie précédente. On en déduit le tableau de variations suivant (remarquant que $v(0) = 1$)

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
$v'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
v	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$v(2)$	$\searrow$	$v(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites en $\pm\infty$ ont été naturellement obtenues par factorisation du terme prépondérant et croissance comparée.

(c) Les approximations données dans le texte permettent de voir que le minimum de v, atteint en 0, vaut 1 et est strictement positif. Par conséquent, $v(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(2) D'après la question précédente, le dénominateur intervenant dans la définition de h ne s'annule jamais et h est donc définie sur $\mathbb{R}$.

(3) La fonction h étant l'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule jamais; elle est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}.$$

Le signe de la dérivée de h est donc l'opposé de celui de $v'(x)$. On en déduit sans mal les variations de h:

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$h(2)$	$\nearrow$	$h(3)$	$\searrow$	0

Partie II - Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$.

(1) Par définition, $u_1 = h(u_0) = h(0) = 1/v(0) = 1$. On a également $u_2 = h(u_1) = h(1)$. Or, le tableau de variations de h nous permet d'affirmer que $h(1) \leq h(3) = 1/v(3) \approx 0,86$ et on a bien $u_2 \leq 1$.

(2) On procède par récurrence comme demandé dans l'énoncé:

- intialisation: $u_1 = 1 \in [\ln(2); \ln(3)]$.
- hérédité: supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \in [\ln(2); \ln(3)]$. Le tableau de variations de h permet de voir que h est croissante sur cet intervalle. Il suit que
$$\ln(2) \leq 0,8 \approx h(\ln(2)) \leq u_{n+1} = h(u_n) \leq h(\ln(3)) \approx 0,86 \leq \ln(3)$$
et la récurrence est bien terminée.

(3) On procède encore par récurrence (on en a marre mais c'est la fin).

- initialisation: pour $n = 1$, on a bien montré ci-avant que $u_2 \leq 1 = u_1$.
- hérédité: supposons que, pour un certain $n \geq 1$, on ait $u_{n+1} \leq u_n$. Par la question précédente, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[\ln(2); \ln(3)]$ sur lequel la fonction h est croissante. Il suit que
$$u_{n+2} = h(u_{n+1}) \leq h(u_n) = u_{n+1}$$
et la récurrence est bien terminée.

(4) La suite (u_n) étant décroissante (à partir de $n \geq 1$) et minorée (par $\ln(2)$), le théorème de convergence monotone affirme qu'elle converge vers une limite ℓ qui sera également comprise entre $\ln(2)$ et $\ln(3)$. Par continuité de la fonction h sur $\mathbb{R}$, le passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = h(u_n)$ impose que ℓ vérifie $\ell = h(\ell)$, équation équivalente à $1/v(\ell) = \ell$ ou encore $\ell \times v(\ell) = 1$.

(5) On répond à cette question `SciLab` par pur plaisir car on adore.

```
function y=h(x)
    y=1/(exp(2*x)-12*exp(x)+22*x+12*exp(-x));
endfunction

n=input('n=?');
u=zeros(1,n+1)
for k=2:n+1
     u(k)=h(u(k-1));
end

plot2d(0:n, u, -1)
```

(6) On peut lire que $\ell \approx 0,81$.