ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

## Concours Blanc n°2

*Durée: 4 heures*

# Exercice 1

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On désigne par $I$ la matrice identité de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) (a) Déterminer la dimension de l'image de $f$, puis montrer que la famille $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
  (b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$, puis donner une base $\mathcal{K}$ de $\mathrm{Ker}(f)$.

(2) On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.
  (a) Écrire $f(u)$ et $f(v)$ comme combinaisons linéaires de $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$, puis $f(u - v)$ et $f(u + 3v)$ comme combinaisons linéaires de $u$ et $v$.
  (b) Montrer que la famille $\mathcal{F}$ formée des vecteurs de $\mathcal{K}$ et complétée par $u - v$ et $u + 3v$ forme une base de $\mathbb{R}^5$.
  (c) Écrire alors la matrice $D$ de $f$ dans la base $\mathcal{F}$ et vérifier que $RDR^{-1} = C$, où $R$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{F}$.

(3) (a) Établir la relation suivante : $D(D + I)(D - 3I) = 0$.
  (b) En déduire que le polynôme $P$ défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de $C$.

(4) On admet que (principe de la division euclidienne), pour tout entier naturel $n$ non nul, il existe un unique polynôme $Q_n$ et trois réels $a_n$, $b_n$ et $c_n$ tels que :

$$X^n = (X^3 - 2X^2 - 3X)Q_n(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

  (a) En utilisant les racines de $P$, déterminer les valeurs de $a_n$, $b_n$ et $c_n$ en fonction de $n$.
  (b) Déduire de ce qui précède l'expression, pour tout entier naturel $n$ non nul, de $C^n$ en fonction de $C$ et $C^2$.

# Exercice 2

**Partie I : Étude d'une fonction**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)}, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(1) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $x - \ln(x) \geq 1 > 0$ et justifier alors que $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

(2) Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(3) (a) Justifier que $f$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. et calculer $f'(x)$ pour tout $x$ de $]0; +\infty[$.
(b) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
(c) Dresser le tableau de variations de $f$ et vérifier que $f$ possède un maximum qui vaut $1/(e-1)$.
(d) Résoudre $f(x) = 0$.
(e) Déduire des deux questions précédentes le signe de $f(x)$.

**Partie II : Une fonction définie par une intégrale**

Pour tout réel $x$ élément de $\mathbb{R}_+$ on pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(4) (a) Montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, puis donner $F'(x)$ et en déduire les variations de $F$.
(b) Calculer $F(0)$ et donner le signe de $F(1)$.

(5) (a) Calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$.
(b) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$F(x) = F(1) + \int_1^x f(t)\mathrm{d}t.$$

(c) Déduire des deux questions précédentes que, pour tout $x > 1$, on a

$$F(x) > \frac{1}{2}(\ln(x))^2.$$

(d) Quelles sont les natures des intégrales

$$(i) \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \qquad (ii) \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t, \qquad (iii) \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t?$$

**Partie III : Étude d'une suite**

On s'intéresse désormais à la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} = g(u_n), \qquad \text{où} \qquad g(x) = \frac{1}{2}f(x) + 1.$$

(6) À l'aide de l'étude de la fonction $f$ réalisée précédemment, démontrer que $g([1; \mathrm{e}]) \subset [1; \mathrm{e}]$ puis que $u_n \in [1; \mathrm{e}]$ pour tout entier naturel $n$.

(7) À l'aide de la première question de l'exercice et de l'expression de $f'(x)$ calculée précédemment, démontrer que

$$0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}.$$

(8) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|.$$

(9) En déduire que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

puis la limite de la suite $u_n$.

(10) Écrire un programme `SciLab` qui calcule et affiche un entier $N$ tel que $|u_N - 1| < 10^{-3}$.

# Exercice 3

On considère une urne contenant une boule noire et trois boules blanches. On effectue le jeu suivant :

- On commence par piocher des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne). On définit la variable aléatoire $N$ égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.

- Puis, lorsque $N$ prend une valeur entière positive non nulle notée $n$, on réalise alors une seconde série de $n$ tirages dans l'urne, toujours avec remise. On définit la variable aléatoire $X$ égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

**Partie I : loi de $N$ et loi de $X$**

(1) (a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $N$ en justifiant votre réponse. Donner son univers image, l'expression de $P(N = n)$, pour tout $n \in N(\Omega)$, puis l'espérance et la variance de $N$.
(b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, en justifiant votre réponse, la probabilité conditionnelle $P_{(N=n)}(X = k)$.
(c) Vérifier, à l'aide de la formule des probabilités totales, que : $P(X = 0) = \dfrac{3}{7}$.

(2) On admet, dans un premier temps, l'égalité

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}},$$

valable pour $x \in ]-1, 1[$ et $k \in \mathbb{N}$.
(a) Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(X = k) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{9}{16}\right)^n.$$

(b) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\quad P(X = k) = \dfrac{16}{21}\left(\dfrac{3}{7}\right)^k$.

(3) Vérifier qu'on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$.

(4) Montrer que $X$ admet une espérance et calculer $E(X)$.

**Partie II : Première étape en double et loi du max**

Dans cette partie, le protocole reste le même, sauf qu'**on effectue deux fois la première étape**.

On note alors $N_1$ le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire lors de la première fois où la première étape est réalisée et $N_2$ le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire lors de la deuxième fois où la première étape est réalisée. *Bien entendu, $N_1$ et $N_2$ sont alors indépendantes.*

On pose à présent $N = \max(N_1, N_2)$, la plus grande des deux valeurs.

A l'issue de ce protocole, $X$ est définie comme auparavant, comme le nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de $n$ tirages, $n$ étant la valeur de $N$.

(5) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(N_1 \leq n) = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

(6) En déduire une expression de $P(N \leq n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(7) Soit $n \geq 2$, exprimer $P(N = n)$ en fonction de $P(N \leq n)$ et de $P(N \leq n-1)$. Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

(8) En déduire, en développant l'expression précédente, que

$$P(N = n) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \frac{7}{16}\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}.$$

(9) Vérifier que $N$ admet une espérance et que $E(N) = \dfrac{40}{7}$. Comparer ce résultat à celui de la première partie. Que diriez-vous de l'espérance de $X$ par rapport à celle de la première partie ?

**Partie III : une démonstration de la formule admise dans la première partie**

*Cette partie est technique, totalement indépendante du reste de l'exercice et pas mal des questions sont (très) difficiles. Voyez ça comme un complément et n'hésitez surtout pas à passer directement à la dernière partie!*

(10) Rappeler la formule du triangle de Pascal liant les coefficients $\binom{j}{i}$, $\binom{j}{i+1}$ et $\binom{j+1}{i+1}$.

(11) Soit $m$ un entier naturel fixé. A l'aide de la formule du triangle de Pascal, montrer par récurrence que $\mathcal{P}(q)$ :

$$\sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$$

est vraie pour tout entier $q \geq m$.

(12) Soit $k$ un entier naturel non nul. et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre $1 - x$, avec $x \in ]0;1[$, et on pose

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} X_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_k.$$

(a) Déterminer $S_k(\Omega)$ puis établir que, $\forall n \geq k+1$ , on a :

$$P\left(S_{k+1} = n\right) = \sum_{j=k}^{n-1} P((S_k = j) \cap (X_{k+1} = n - j)).$$

(b) En déduire, par récurrence sur $k$ , que

$$\forall n \geq k, \quad P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1}(1-x)^k x^{n-k}.$$

(c) En déduire, pour $x$ de $]0,1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$, que :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^k}.$$

(d) En utilisant une propriété de linéarité de sommes, un changement d'indice et en remplaçant enfin $k$ par $k+1$, retrouver la formule admise au début de la deuxième question de la première partie.

**Partie IV : `SciLab` !**

*Cette partie est largement indépendante du reste, dans la mesure où elle n'utilise que les définitions des variables aléatoires données en début de partie. Vous pouvez donc l'aborder sans avoir traiter les questions de la partie concernées*

On rappelle que la commande `grand(i,j,'bin',n,p)` permet à `Scilab` de simuler une matrice à $i$ lignes et $j$ colonnes dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

De même, la commande `grand(i,j,'geom',p)` permet à `SciLab` de simuler une matrice à $i$ lignes et $j$ colonnes dont les coefficients sont $n$ variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p$.

(13) Compléter le programme suivant afin de simuler les variables aléatoires $N$ et $X$ décrites à la première partie :

```
N=grand(.... , .... , ..... , .....)
X=grand(..... , ..... , ..... , ..... , .....)
disp(N)
disp(X)
```

(14) Modifier le programme précédent afin de simuler $N$ et $X$ définies comme dans la deuxième partie de l'exercice.

(15) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Compléter le programme suivant afin de simuler la variable aléatoire $S_k$ décrite au début de la troisième partie.

```
n=input("n=?")
S=....................
disp(S)
```

• $\mathcal{FIN}$ •