Concours Blanc n°2

Solution

Exercice 1- D'après EDHEC 2015

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) (a) Les quatre dernières colonnes de la matrices C étant les mêmes, on peut tout de suite écrire que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5;\ e_1 + e_5\right).$$

Ces deux vecteurs - qui engendrent l'image de f - étant clairement non colinéaires, ils forment une base de l'image de f qui est donc de dimension 2. Ainsi $e_1 + e_5$ est dans l'image et

$$e_2 + e_3 + e_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - (e_1 + e_5) \in \mathrm{Im}(f).$$

Ces deux vecteurs étant des éléments de l'image de f et étant à nouveau non colinéaires, ils forment également une base de l'image car celle-ci est de dimension 2.

(b) D'après le théorème du rang, on peut déduire que la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ est égale à $5-2=3$. Pour en déterminer une base, on résout l'équation $f(u)=0$.

$$u=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\\ w\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}(f) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t+w & = & 0\\ x & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0\\ w & = & -(y+z+t)\end{array}\right.$$

$$\iff u=\begin{pmatrix} 0\\ y\\ z\\ t\\ -(y+z+t)\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 0\\ -1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 0\\ -1\end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\right)$$

Les trois vecteurs ci-dessus, que l'on note respectivement $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ forment une famille libre (c'est immédiat) et engendrent le noyau de f. Ils en forment donc une base, que l'on note $\mathcal{K}$.

(2) On note $u=e_2+e_3+e_4$ et $v=e_1+e_5$.

(a) On utilise la linéarité de f et la valeurs des images des vecteurs de la base canonique à partir des colonnes de C.

$$\begin{array}{rcl} f(u) & = & f(e_2+e_3+e_4)=f(e_2)+f(e_3)+f(e_4)\\ & = & e_1+e_5+e_1+e_5+e_1+e_5=3(e_1+e_5)\\ & = & 3v\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f(v) & = & f(e_1+e_5)=f(e_1)+f(e_5)\\ & = & e_1+e_2+e_3+e_4+e_5+e_1+e_5=2(e_1+e_5)+e_2+e_3+e_4\\ & = & u+2v\end{array}$$

Il suit que

$$\begin{array}{rcl} f(u-v) & = & f(u)-f(v)=3v-(u+2v)\\ & = & v-u\\ & = & -(u-v)\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} f(u+3v) & = & f(u)+3f(v)=3v+3(u+2v)\\ & = & 3u+9v\\ & = & 3(u+3v)\end{array}$$

(b) Il faut alors montrer que la famille

$$\mathcal{F}=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

forme une base de $\mathbb{R}^5$. Cette famille étant composée de cinq vecteurs de $\mathbb{R}^5$, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soient $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$. On a

$$a\varepsilon_1+b\varepsilon_2+c\varepsilon_3+d(u-v)+e(u+3v)=0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} -d+3e &=& 0\\ a+d+e &=& 0\\ b+d+e &=& 0\\ c+d+e &=& 0\\ -a-b-c-d+3e &=& 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0\\ b &=& 0\\ c &=& 0\\ d &=& 0\\ e &=& 0\end{array}\right.$$

Ainsi la famille est libre et forme bien une base de $\mathbb{R}^5$.

(c) Au vu des questions précédentes (les trois premiers vecteurs de $\mathcal{F}$ sont dans le noyau de f - donc leur image est nulle; $u-v$ est envoyé sur son opposé et $u+3v$ sur trois fois lui même), on en déduit aisément que

$$D=\mathrm{Mat}(f,\mathcal{K})=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}$$

De plus, notant

$$R=\begin{pmatrix}0&0&0&-1&3\\1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&1&1\\-1&-1&-1&-1&3\end{pmatrix},$$

il est clair que R est inversible (elle représente la matrice identité de la base $\mathcal{K}$ dans la base canonique; ou encore son image est de dimension 5 car les colonnes forment une base). Ainsi, plutôt que de calculer explicitement son inverse par Pivot de Gauss, on voit que l'égalité demandée est équivalente à $RD=CR$. Or,

$$RD=\begin{pmatrix}0&0&0&-1&3\\1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&1&1\\-1&-1&-1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1&9\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&1&9\end{pmatrix}$$

et on a bien

$$CR=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&-1&3\\1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&1&1\\-1&-1&-1&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1&9\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&1&9\end{pmatrix}.$$

(3) (a) On fait le calcul

$$\begin{aligned}
D(D+I)(D-3I) &= \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3&0&0&0&0\\ 0&-3&0&0&0\\ 0&0&-3&0&0\\ 0&0&0&-4&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3&0&0&0&0\\ 0&-3&0&0&0\\ 0&0&-3&0&0\\ 0&0&0&-4&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

(b) En développant la relation précédente on a

$$D(D+I)(D-3I)=0 \Longleftrightarrow D^3-2D^2-3D=0$$

En multipliant à droite par R^{-1} et à gauche par R on obtient

$$\begin{aligned}
R\left(D^3-2D^2-3D\right)R^{-1} &= 0\\
\Longleftrightarrow \quad RD^3R^{-1}-2RD^2R^{-1}-3RDR^{-1} &= 0\\
\Longleftrightarrow \quad \left(RDR^{-1}\right)^3-2\left(RDR^{-1}\right)^2-3\left(RDR^{-1}\right) &= 0\\
\Longleftrightarrow \quad C^3-2C^2-3C &= 0
\end{aligned}$$

et le polynôme P défini par $P(X)=X^3-2X^2-3X$ est bien un polynôme annulateur de C.

(4) On admet que (principe de la division euclidienne), pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique polynôme Q_n et trois réels $a_n,\ b_n$ et c_n tels que :

$$X^n=(X^3-2X^2-3X)Q_n(X)+a_nX^2+b_nX+c_n$$

(a) En injectant les trois racines de P (qui sont 0, -1 et 3) dans l'équation de division euclidienne ci-dessus, on obtient

$$0=c_n,\quad (-1)^n=a_n-b_n+c_n,\quad 3^n=9a_n+3b_n+c_n$$

On résout le système correspondant (sans difficulté, c'est finalement un système 2×2) pour obtenir

$$a_n=\frac{3^n+3(-1)^n}{12},\qquad b_n=\frac{3^n-9(-1)^n}{12},\qquad c_n=0.$$

(b) D'après la question précédente, et comme $P(X)$ annule C (ou encore $P(C)=0$) on obtient

$$C^n=a_nC^2+b_nC=\frac{1}{12}\left(\left(3^n+3(-1)^n\right)C^2+\left(3^n-9(-1)^n\right)C\right).$$

Exercice 2

Partie I : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-\ln(x)}, & \text{si } x>0\\ -1, & \text{si } x=0 \end{cases}$$

(1) La fonction $x \mapsto x - \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et a pour dérivée $1 - 1/x$, quantité négative sur $]0;1]$ et positive sur $[1;+\infty[$. Son minimum est alors atteint en $x = 1$ où elle vaut 1. On a donc bien, pour tout $x > 0$,

$$x - \ln(x) \geq 1 > 0.$$

En particulier, le dénominateur de f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction f y est alors bien définie.

(2) Sur $]0;+\infty[$, f est continue comme quotient de fonctions usuelles continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Il faut vérifier la continuité en 0, c'est à dire vérifier que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = -1.$$

On voit que,

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x)\left(\frac{x}{\ln(x)} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{x}{\ln(x)} - 1} \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} \frac{1}{0-1} = -1,$$

car

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln(x)} = 0,$$

par quotient des limites. On a donc bien le résultat voulu.

(3) (a) Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable comme quotient de deux fonctions usuelles dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Les formules de dérivations donnent, pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times (x - \ln(x)) - \ln(x) \times \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln(x))^2} = \frac{1 - \ln(x)}{(x - \ln(x))^2}.$$

(b) En $+\infty$, on factorise chaque membre du quotient définissant f par son terme prépondérant et on conclut par croissance comparée

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(c) Les questions précédentes permettent de dresser le tableau de variations complet de f. Comme $f(e) = 1/(e-1)$,

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & 0 & & e & & +\infty \\
\hline
f'(x) & \| & + & 0 & - & \\
\hline
 & & & 1/(e-1) & & \\
f & & \nearrow & & \searrow & \\
 & -1 & & & & 0 \\
\hline
\end{array}$$

(d) Appliquer le théorème de bijection à la restriction de f à l'intervalle $[0;e]$ permet de voir que 0 admet un unique antécédent par f, ou encore $f(x) = 0$ admet une unique solution. Toujours d'après le tableau de variations (et le théorème de bijection), il n'y a pas de solution sur l'intervalle $[e;+\infty[$. Pour déterminer la solution explicitement, ici, on résout. Comme $f(0) = -1$, 0 n'est pas solution. On cherche donc pour $x > 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\iff \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} = 0 \\
&\iff \ln(x) = 0 \\
&\iff x = 1.
\end{aligned}$$

(e) Il est maintenant facile de dresser le tableau de signe de $f(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Partie II : Une fonction définie par une intégrale

Pour tout réel x élément de $\mathbb{R}_+$ on pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(4) (a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, F est la primitive de f, définie sur $\mathbb{R}_+$, qui s'annule en 0. En particulier, elle est bien dérivable et comme $F' = f$ est continue, elle est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Connaissant, grâce aux questions de la partie précédente le signe de $f(x) = F'(x)$, on en déduit les variations de F

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
F	0	$\searrow$	$F(1)$	$\nearrow$	

(b) Par définition de l'intégrale $F(0) = 0$ et par décroissance de F sur $[0;1]$, $F(1) \leq F(0) = 0$.

(5) (a) On reconnait, sous le signe intégral, une fonction de la forme $u'u$ (avec $u(t) = \ln(t)$) dont une primitive est donnée par $u^2/2$. Ainsi,

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln(t)^2}{2}\right]_1^x = \frac{\ln(x)^2}{2}.$$

(b) D'après la relation de Chasles,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = F(1) + \int_1^x f(t)\mathrm{d}t.$$

(c) Si $x > 1$, on a, pour tout $t \in [1;x]$

$$t - \ln(t) \leq t \Longrightarrow \frac{\ln(t)}{t - \ln(t)} \geq \frac{\ln(t)}{t}$$

et, par positivité de l'intégrale,

$$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \geq \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\ln(x)^2}{2}.$$

En combinant avec la question précédente, on a

$$F(x) = F(1) + \int_1^x f(t)\mathrm{d}t \geq F(1) + \frac{\ln(x)^2}{2}.$$

(d) $F(1)$ est une constante (c'est l'intégrale d'une fonction continue sur $[0;1]$). En particulier, l'intégrale (ii) est convergente (faussement impropre en 0). Comme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^2}{2} = +\infty,$$

l'inégalité précédente, permet de justifier, par le théorème de comparaison que

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = +\infty$$

ce qui permet d'affirmer que l'intégrale (i) n'est pas convergente tout comme l'intégrale (iii).

Partie III : Étude d'une suite

On s'intéresse désormais à la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} = g(u_n), \qquad \text{où} \qquad g(x) = \frac{1}{2}f(x) + 1.$$

(6) La fonction g est dérivable (et donc continue) sur $[1;e]$ et sa dérivée vaut $g'(x) = f'(x)/2 \geq 0$ sur ce même intervalle. Ainsi, la fonction g est croissante. Il suit que $g([1;e]) = [g(1);g(e)]$. Or, $g(1) = 1$ et

$$g(e) = \frac{1}{2(e-1)} + 1 < 2 < e,$$

et on a bien l'inclusion voulue.

(7) D'après la Question 1 de la Partie 1, $x - \ln(x) \geq 1$. Ainsi, $(x - \ln(x))^2 \geq 1$. Pour $x \in [1;e]$, $\ln(x) \geq 0$. Il suit que, pour $x \in [1;e]$, $0 \leq f'(x) \leq 1$. Par définition de g, on a donc bien

$$0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}.$$

(8) La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;e]$. Pour tout $t \in [1;e]$, $|g'(t)| \leq 1/2$. Une récurrence immédiate (qui mériterait éventuellement d'apparaître sur la copie) permet de voir, en utilisant la Question 6, que $u_n \in [1;e]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Naturellement $1 \in [1;e]$. En appliquant donc l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle $[1;e]$, on obtient donc

$$|g(u_n) - g(1)| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|.$$

Mais, $g(u_n) = u_{n+1}$ et $g(1) = f(1)/2 + 1 = 1$ donc on a bien

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}\,|u_n - 1|\,.$$

(9) Une récurrence permet alors de voir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

En effet, c'est clair pour $n = 0$: $|u_0 - 1| = |2 - 1| = 1 = (1/2)^0$. En supposant que cela soit vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on voit que

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - 1| &\leq \frac{1}{2}|u_n - 1| && \text{(par la question précédente)} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n && \text{(par HR)} \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

et la récurrence est terminée. On applique le théorème des gendarmes; comme $(1/2)^n \to 0$, il suit que $u_n \to 1$.

(10) Le programme `SciLab` est classique. Par la question précédente, il suffit de calculer u_n pour un n tel que $(1/2)^n \leq 10^{-3}$. On propose la solution suivante

```
u=2:
n=0;
while (1/2)^n >=10^(-3)
    n=n+1;
    u=1/2*log(u)/(u-log(u)) +1;
end
disp(u)
```

Exercice 3

On considère une urne contenant une boule noire et trois boules blanches. On effectue le jeu suivant :

- On commence par piocher des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne). On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.

- Puis, lorsque N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise. On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

Partie I : loi de N et loi de X

(1) (a) La première expérience ayant lieu avec remise, à chaque tirage on a une probabilité $1/4$ d'obtenir la noire. La variable N est alors un *temps d'attente du premier succès* (obtenir la noire). On reconnait une loi géométrique

$$N \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{4}\right).$$

En particulier, $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(N = k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \frac{1}{4}.$$

Le cours nous donne aussi

$$E(N) = 4, \qquad V(N) = 12.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant $N = n$, on réalise n tirages avec remise et on s'intéresse au nombre de succès (obtenir la noire) lors de ces n tirages. Si $k > n$, il n'est pas possible d'obtenir plus de boules noires que de boules tirées et la probabilité cherchée est nulle. Sinon, on reconnait alors une loi binomiale de paramètres n et $1/4$, on peut donc écrire

$$P_{(N=n)}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}.$$

(c) D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements $\{(N = n) : n \in \mathbb{N}^*\}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P_{(N=n)}(X=0)P(N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{3}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{2(n-1)} = \frac{3}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1} \\
&= \frac{3}{7}.
\end{aligned}$$

(2) On admet, dans un premier temps, l'égalité

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}},$$

valable pour $x \in]-1,1[$ et $k \in \mathbb{N}$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Toujours grâce à la formule des probabilités totales appliquée au même s.c.e et en utilisant que $P_{(N=n)}(X=k) = 0$ si $n < k$, on obtient

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P_{(N=n)}(X=k)P(N=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X=k)P(N=n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{4} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n-(k+1)} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{-(k+1)}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{9}{16}\right)^{n}
\end{aligned}$$

(b) En utilisant la formule admise énoncée ci-dessus (avec $x = 9/16$), on obtient

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{9}{16}\right)^{n} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\times\frac{\left(\frac{9}{16}\right)^k}{\left(1-\frac{9}{16}\right)^{k+1}} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\left(\frac{9}{7}\right)^k\frac{16}{7} \\
&= \frac{16}{21}\left(\frac{3}{7}\right)^k.
\end{aligned}$$

(3) En combinant les différentes questions précédentes

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) &= P(X=0)+\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)\\ &= \frac{3}{7}+\frac{16}{21}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^{k}\\ &= \frac{3}{7}+\frac{16}{49}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^{k-1}\\ &= \frac{3}{7}+\frac{16}{49}\times\frac{1}{1-\frac{3}{7}}\\ &= \frac{3}{7}+\frac{16}{49}\times\frac{7}{4}=\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\\ &= 1,\end{aligned}$$

comme attendu.

(4) La variable X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(X=k)$ converge. Or, pour $k\geq 1$,

$$kP(X=k)=\frac{16}{49}k\left(\frac{3}{7}\right)^{k-1}$$

et on reconnait le multiple du terme général d'une série géométrique dérivée de raison $3/7$ donc convergente. Ainsi, X admet un espérance et

$$E(X)=\frac{16}{49}\times\frac{1}{\left(1-\frac{3}{7}\right)^2}=1.$$

Partie II : Première étape en double et loi du max

Dans cette partie, le protocole reste le même, sauf qu'**on effectue deux fois la première étape**.

On note alors N_1 le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire lors de la première fois où la première étape est réalisée et N_2 le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire lors de la deuxième fois où la première étape est réalisée. *Bien entendu, N_1 et N_2 sont alors indépendantes.*

On pose à présent $N=\max(N_1,N_2)$, la plus grande des deux valeurs.

A l'issue de ce protocole, X est définie comme auparavant, comme le nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de n tirages, n étant la valeur de N.

(5) Pour les mêmes raisons que précédemment, N_1 et N_2 suivent toutes deux la même loi géométrique de paramètre $1/4$. Il suit que

$$P(N_1\leq n)=\sum_{k=1}^{n}P(N_1=k)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}=\frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

(6) On utilise la définition du maximum et le fait que N_1 et N_2 suivent la même loi.

$$\begin{aligned}P(N\leq n) &= P([N_1\leq n]\cap[N_2\leq n])\\ &= P(N_1\leq n)P(N_2\leq n) \qquad \text{(par indépendance)}\\ &= \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)^2.\end{aligned}$$

(7) Soit $n \geq 2$. Comme $[N = n] \cup [N \leq n-1] = [N \leq n]$ et que l'union est disjointe, on a

$$P(N = n) = P(N \leq n) - P(N \leq n-1).$$

Si $n = 1$, $P(N \leq n-1) = P(N \leq 0) = 0$ et $P(N = 1) = P(N \leq 1)$. On a bien répondu à la question.

(8) On obtient

$$\begin{aligned}
P(N = n) &= P(N \leq n) - P(N \leq n-1) \\
&= \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)^2 - \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)^2 \\
&= 1 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{9}{16}\right)^n - 1 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{9}{16}\right)^{n-1} \\
&= \left(2 - \frac{6}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{9}{16}\right)\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \frac{7}{16}\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1},
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(9) Comme précédemment, N admet une espérance si la série de terme général $nP(N = n)$ converge. Celle ci est clairement combinaison de séries géométriques dérivées (de raisons $3/4$ et $9/16$) convergentes. Donc N admet une espérance et

$$\begin{aligned}
E(N) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \frac{7}{16}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} - \frac{7}{16}\frac{1}{(1-\frac{9}{16})^2} \\
&= 8 - \frac{16}{7} \\
&= \frac{40}{7} \sim 5,7.
\end{aligned}$$

On constante qu'on effectue, avec ce protocole, en moyenne plus de tirages que dans le premier protocole (où $E(N) = 4$). On peut donc s'attendre à obtenir, en moyenne, davantage de boules noires.

Partie III : une démonstration de la formule admise dans la première partie

(10) La formule du triangle de Pascal donne

$$\binom{j}{i} + \binom{j}{i+1} = \binom{j+1}{i+1}.$$

(11) On a déjà vu cette formule un grand nombre de fois (par exemple dans le sujet **ECRICOME 2017**). On peut procéder par récurrence ou à l'aide d'une somme télescopique, ce qu'on va finalement faire ici

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{q}\binom{k}{m} &= \sum_{k=m}^{q}\left(\binom{k+1}{m+1} - \binom{k}{m+1}\right) \\
&= \binom{q+1}{m+1} - \binom{m}{m+1} \\
&= \binom{q+1}{m+1}.
\end{aligned}$$

(12) Soit k un entier naturel non nul. et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre $1-x$, avec $x\in]0;1[$, et on pose

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}X_n=X_1+X_2+\cdots+X_k.$$

(a) Pour chaque $i\in[\![1;k]\!]$, $X_i(\omega)\geq 1$ donc $S_k(\omega)\geq k$. Chaque X_i pouvant prendre des valeurs arbitrairement grandes, c'est aussi le cas de S_k. Ainsi, $S_k(\Omega)=[\![k;+\infty[\![$. Comme

$$S_{k+1}=S_k+X_{k+1},$$

en appliquant la formule des probabilités totales au s.c.e $\{(S_k=j)\ :\ \ j\geq k\}$, on obtient (pour $n\geq k+1$), sachant que X_{k+1} est indépendante de S_k (qui ne dépend que des X_i pour $i\in[\![1;k]\!]$)[1] Comme, de plus, si $j\geq n$,

$$P(S_k=j\cap S_{k+1}=n)=0$$

$$\begin{aligned}
P(S_{k+1}=n) &= \sum_{j=k}^{+\infty}P(S_k=j\cap S_{k+1}=n)=\sum_{j=k}^{n-1}P(S_k=j\cap S_{k+1}=n)\\
&= \sum_{j=k}^{n-1}P(S_k=j\cap X_{k+1}=n-j)\\
&= \sum_{j=k}^{n-1}P(S_k=j)P(X_{k+1}=n-j) \qquad\qquad \text{par indépendance,}
\end{aligned}$$

ce qui est la formule attendue.

(b) On procède donc par récurrence.

- initialisation: pour $k=1$, on a, pour tout $n\geq 1$,

$$P(S_1=n)=P(X_1=n)=x^{n-1}(1-x)=\binom{n-1}{0}(1-x)^1x^{n-1},$$

et la formule est vérifiée.

- hérédité: Supposons la propriété vraie pour un certain $k\geq 1$. Soit $n\geq k+1$, on a

$$\begin{aligned}
P(S_{k+1}=n) &= \sum_{j=k}^{n-1}P(S_k=j)P(X_{k+1}=n-j)\\
&= \sum_{j=k}^{n-1}\binom{j-1}{k-1}(1-x)^kx^{j-k}x^{n-j-1}(1-x)\\
&= (1-x)^{k+1}x^{n-(k+1)}\sum_{j=k}^{n-1}\binom{j-1}{k-1}\\
&= (1-x)^{k+1}x^{n-(k+1)}\sum_{\ell=k-1}^{n-2}\binom{\ell}{k-1}\\
&= (1-x)^{k+1}x^{n-(k+1)}\binom{n-1}{k},
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $k+1$ et termine la récurrence.

[1] En fait, ce résultat est une conséquence du Lemme des coalitions, au programme de la deuxième année. Pour cette fois, on va être magnanime.

(c) Comme $S_k(\Omega) = [\![k;+\infty[\![$, on a

$$\sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n = k) = 1 \iff \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1}(1-x)^k x^{n-k} = 1$$
$$\iff \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^k}.$$

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^k}.$$

(d) Comme

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} x^{n-k} = x^{-k} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} x^{n},$$

la question précédente donne

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} x^{n} = \frac{x^k}{(1-x)^k}.$$

En posant $j = n-1$, on obtient

$$\sum_{j=k-1}^{+\infty} \binom{j}{k-1} x^{n+1} = \frac{x^k}{(1-x)^k} \iff \sum_{j=k-1}^{+\infty} \binom{j}{k-1} x^{n} = \frac{x^{k-1}}{(1-x)^k}.$$

Maintenant, on remplace $k-1$ par k (et donc k par $k+1$), et on obtient

$$\sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} x^{n} = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \qquad \text{OUF!}$$

Partie IV : `SciLab` !

On rappelle que la commande `grand(i,j,'bin',n,p)` permet à `Scilab` de simuler une matrice à i lignes et j colonnes dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi binomiale de paramètres n et p.

De même, la commande `grand(i,j,'geom',p)` permet à `SciLab` de simuler une matrice à i lignes et j colonnes dont les coefficients sont n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.

(13) Sans aucune difficulté

```
N=grand(1 ,  1 , 'geom' , 1/4)
X=grand(1 , 1 , 'bin' , N , 1/4)
disp(N)
disp(X)
```

(14) Il suffit de simuler deux lois géométriques et de prendre leur maximum.

```
N1=grand(1 ,  1 , 'geom' , 1/4)
N2=grand(1 ,  1 , 'geom' , 1/4)
if N1<N2 then
    N=N2
else
    N=N1
end
X=grand(1 , 1 , 'bin' , N , 1/4)
disp(N)
disp(X)
```

On propose une variante plus courte

```
N=grand(1 ,  2 , 'geom' , 1/4)
N=max(N(1), N(2))
X=grand(1 , 1 , 'bin' , N , 1/4)
disp(N)
disp(X)
```

(15) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Il suffit d'utiliser la commande `sum`.

```
n=input("n=?")
S=sum(grand(1,n, 'geom', 1/4))
disp(S)
```

• $\mathcal{FIN}$ •