



---

## Concours Blanc n°2: Mathématiques II

*Durée: 4 heures*

---

Une question que se pose un joueur de cartes est de savoir combien de fois il est nécessaire de battre les cartes pour que le paquet soit convenablement mélangé. Ce problème décrit un procédé très élémentaire pour mélanger les cartes et propose de répondre alors à cette question.

Considérons un jeu de  $N$  cartes numérotées de  $C_1$  à  $C_N$  et disposées en un paquet sur une table. Un joueur bat les cartes et repose le paquet sur la table. Le résultat du mélange est une permutation de ces  $N$  cartes.

**Notations et Rappel:** On rappelle que deux quantités  $u_n$  et  $v_n$  sont équivalentes au voisinage de l'infini si et seulement si leur quotient tend vers 1:

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

On note  $S_N$  l'ensemble des permutations possibles pour ce paquet de  $N$  cartes et on rappelle que  $\text{card}(S_N) = N!$

On se place dans un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  avec  $\Omega = S_N$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(S_N)$  l'ensemble des parties de  $S_N$  et  $\mathbf{P}$  l'équiprobabilité sur  $\Omega$ . Pour toute variable aléatoire  $X$  on notera  $E(X)$  et  $V(X)$  l'espérance et la variance de  $X$  lorsqu'elles existent.

On considère qu'un paquet est *convenablement mélangé* lorsque toutes les permutations sont équiprobables, c'est-à-dire lorsque pour toute permutation  $\sigma$  de  $S_N$  la probabilité que le tas de cartes se trouve dans la configuration  $\sigma$  vaut  $1/N!$

### Vocabulaire et notations:

Une carte située au sommet de la pile est dite *en position n° 1*, celle qui se trouve immédiatement en dessous est dite *en position n° 2*, etc. Ainsi une carte située *en position n° N* désigne la carte située en bas de la pile. On prendra garde à bien distinguer la position d'une carte dans le paquet du numéro qu'elle porte.

Partons d'un tas de cartes rangées initialement dans l'ordre suivant: pour tout  $i$  élément de  $\llbracket 1, N \rrbracket$ , la carte  $C_i$  se trouve en position  $i$ .

Ainsi, à l'instant initial, la carte  $C_1$  se trouve sur le dessus du paquet alors que  $C_N$  se trouve donc tout en dessous du paquet.

Pour  $k$  élément de  $\llbracket 1, N \rrbracket$ , on appelle *insertion* à la  $k$ -ième place l'opération qui consiste à prendre la carte située au-dessus du paquet et à l'insérer entre la  $k$ -ième et la  $(k + 1)$ -ième place. Une insertion à la première place ne change pas l'ordre des cartes. Une insertion à la  $N$ -ième place consiste à faire glisser la carte située au-dessus du paquet pour la mettre sous le paquet.

Le *battage par insertions* du jeu de cartes consiste à effectuer une suite d'insertions aléatoires, en choisissant, à chaque instant, au hasard uniformément dans  $\{1, \dots, N\}$  la place à laquelle l'insertion a lieu, **indépendamment** des insertions précédentes.

Les instants successifs d'insertions seront notées  $1, 2, \dots, n, \dots$ , l'instant initial est  $n = 0$ .

**Notations.** Nous notons:

- $T_1$  le premier instant où la carte située sur le dessus du paquet est glissée en dernière position, c'est-à-dire le premier instant où la carte  $C_N$  se trouve remontée de la position  $N$  à la position  $N - 1$ ,
- $T_2$  le premier instant où la carte  $C_N$  se trouve remontée en position  $N - 2$ ,
- et plus généralement, pour  $i$  dans  $\llbracket 1, N - 1 \rrbracket$ ,  $T_i$  le premier instant où la carte  $C_N$  atteint la position  $N - i$ .
- On posera également  $\Delta_1 = T_1$  et  $\forall i \in \llbracket 2; N - 1 \rrbracket$ ,  $\Delta_i = T_i - T_{i-1}$ .
- Enfin, on notera  $T = T_{N-1} + 1$ .

On admet que les conditions de l'expérience permettent de faire l'hypothèse que les variables aléatoires  $(\Delta_i)_{1 \leq i \leq N-1}$  sont **indépendantes**.

**Description d'un exemple.** Dans le tableau ci-dessous, nous décrivons les résultats d'une expérience faite sur un paquet de  $N = 4$  cartes. La première ligne du tableau indique les instants  $n$ , la deuxième ligne indique les positions d'insertions, et dans la dernière ligne figure la configuration du paquet à l'instant  $n$ .

	instant	$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
	insertion	en place	$k$	3	2	4	1	3	4	2
Configuration du paquet	position	1	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_2$	$C_2$	$C_1$	$C_4$	$C_2$
	position	2	$C_2$	$C_3$	$C_2$	$C_1$	$C_1$	$C_4$	$C_2$	$C_4$
	position	3	$C_3$	$C_1$	$C_1$	$C_4$	$C_4$	$C_2$	$C_3$	$C_3$
	position	4	$C_4$	$C_4$	$C_4$	$C_3$	$C_3$	$C_3$	$C_1$	$C_1$

Pour cette expérience, on a les résultats  $T_1(\omega) = 3$ ,  $T_2(\omega) = 5$  et  $T_3(\omega) = 6$  et  $T(\omega) = 7$ .

## I - Description et premiers résultats

- (1) Justifier que  $\forall i \in \llbracket 2, N - 1 \rrbracket$

$$T_i = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_i.$$

Que représente l'intervalle de temps  $\Delta_i$ ?

- (2) **Loi de  $\Delta_1$ .** Déterminer pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{P}(\Delta_1 > n)$  et reconnaître la loi de  $\Delta_1$ .

- (3) **Loi de  $\Delta_i$ .** Soit  $i \in \llbracket 2, N - 1 \rrbracket$ .

- (a) Établir que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\mathbf{P}(\Delta_i > n) = \left(\frac{N-i}{N}\right)^n$ .

En déduire que  $\Delta_i$  suit une loi usuelle que l'on précisera.

- (b) En déduire

$$E(\Delta_i) = \frac{N}{i}, \quad \text{et} \quad V(\Delta_i) = N \frac{N-i}{i^2}.$$

- (4) **Loi de  $T_2$ .** Soit  $n \geq 2$ .

- (a) Démontrer que  $\mathbf{P}(T_2 = n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(\Delta_2 = n - k) \mathbf{P}(\Delta_1 = k)$

(b) Justifier que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1-1/N}{1-2/N} \right)^k = N \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \left[ \left( \frac{1-1/N}{1-2/N} \right)^{n-1} - 1 \right].$$

(c) En déduire que l'on a

$$\mathbf{P}(T_2 = n) = \frac{2}{N} \left[ \left( 1 - \frac{1}{N} \right)^{n-1} - \left( 1 - \frac{2}{N} \right)^{n-1} \right].$$

(5) À l'instant  $T_2$ , la carte  $C_N$  est située en position  $N-2$  et deux cartes se trouvent sous elle qui ont été insérées aux instants  $T_1$  et  $T_2$ . Que valent alors les probabilités, qu'à l'instant  $T_2$ :

- (a) la carte insérée à l'instant  $T_1$  soit en place  $N-1$  et celle insérée à l'instant  $T_2$  en place  $N$  ?  
 (b) la carte insérée à l'instant  $T_2$  soit en place  $N-1$  et celle insérée à l'instant  $T_1$  en place  $N$  ?

(6) À l'instant  $T_3$ , la carte  $C_N$  est située en position  $N-3$  et trois cartes, insérées aux instants  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$ , se trouvent sous elle. On note alors, pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $a_i$  la position de la carte ayant été insérée à l'instant  $T_i$ .

(a) Combien y a-t-il de résultats possibles pour le triplet  $(a_1, a_2, a_3)$ ?

(b) **Quelques exemples.** Donner les probabilités qu'à l'instant  $T_3$ :

- (i) on obtienne  $(a_1, a_2, a_3) = (N-2, N-1, N)$ ?  
 (ii) on obtienne  $(a_1, a_2, a_3) = (N-2, N, N-1)$ ?

(7) Justifier la phrase suivante:

"À partir de l'instant  $T$ , toutes les configurations du jeu de cartes sont équiprobables."

*On retiendra que si on arrête le battage des cartes par insertion exactement à l'instant  $T$ , on a un paquet convenablement mélangé. Cependant le temps  $T$  étant aléatoire, il n'est pas possible d'arrêter de battre les cartes à cet instant précis, à moins de marquer la carte  $C_N$  bien sûr!*

## II - Estimation du nombre d'insertions pour bien mélanger les cartes

**Notations:** on introduit les suites  $(H_n)_{n \geq 1}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies par:

$$\forall n \geq 1 \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = H_n - \ln(n)$$

(8) **Espérance et variance de  $T$**

Justifier que  $E(T) = NH_N$  et que

$$V(T) = N^2 \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \right) - NH_N.$$

(9) **Étude de la suite  $(u_n)$**

(a) Montrer que pour tout entier  $k \geq 1$ , on a

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

(b) En déduire successivement:

- (i) la décroissance de la suite  $(u_n)$ ,  
 (ii) l'encadrement:  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$ .

(c) Déduire de ce qui précède que la suite  $(u_n)$  est convergente et que sa limite, notée  $\gamma$  appartient à  $[0, 1]$ .

- (10) (a) Établir que  $E(T) \underset{+\infty}{\sim} N \ln(N)$  et  $E(T) = N \ln(N) + N\gamma + o(N)$ .  
 (b) Quelle est la nature de la suite  $(V(T)/N^2)$ ? (On prendra garde au fait que  $V(T)$  dépend de  $N$ .) Justifier qu'il existe une constante  $\alpha$ , strictement positive, telle que

$$V(T) \underset{+\infty}{\sim} \alpha N^2 \text{ et } V(T) \leq \alpha N^2.$$

(11) **Écart à la moyenne**

On rappelle l'inégalité de *Bienaymé-Chebychev* valable pour une variable aléatoire  $X$  admettant une espérance et une variance:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbf{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Soit  $N$  fixé et une constante  $c$  strictement plus grande que 1.

- (a) Justifier que  $\forall \omega \in \Omega, |T(\omega) - N \ln(N)| \leq |T(\omega) - E(T)| + N$ .  
 Comparer par une inclusion les événements suivants

$$(|T - N \ln(N)| \geq cN) \text{ et } (|T - E(T)| \geq N(c-1))$$

- (b) Démontrer que

$$\mathbf{P}(|T - N \ln(N)| \geq cN) \leq \frac{\alpha}{(c-1)^2}$$

où  $\alpha$  a été définie à la question 10b.

Le nombre  $N$  étant fixé, que vaut  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|T - N \ln(N)| \geq cN)$  ?

- (12) Démontrer aussi que pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|T - N \ln(N)| \geq \varepsilon N \ln(N)) = 0.$$

*On peut traduire ces résultats en disant que l'événement: "T s'écarte de  $N \ln(N)$  de manière significative" est un événement asymptotiquement rare.*

*Pour information, pour un paquet de 32 cartes, on donne  $32 \ln(32) \simeq 110$  et pour un paquet de 52 cartes,  $52 \ln(52) \simeq 205$ .*

### III - Distance variationnelle à la loi uniforme

**Notations :**

- On note  $\pi$  l'équiprobabilité sur  $\mathcal{S}_N$ , c'est-à-dire l'application de  $\mathcal{P}(\mathcal{S}_N)$  dans  $[0, 1]$  telle que:

$$\forall A \subset \mathcal{S}_N \quad \pi(A) = \frac{\text{card}(A)}{N!}; \text{ en particulier, } \forall \sigma \in \mathcal{S}_N \quad \pi(\{\sigma\}) = \frac{1}{N!}.$$

- On note également  $\mu_n$  la probabilité sur  $\mathcal{S}_N$  définie comme suit:  
 pour chaque configuration  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_N$ ,  $\mu(\{\sigma\})$  désigne la probabilité qu'à l'instant  $n$  le tas de cartes se trouve dans la configuration  $\sigma$ .

On a alors pour toute partie  $A$  de  $\mathcal{S}_N$ ,  $\mu_n(A) = \sum_{\sigma \in A} \mu_n(\sigma)$ .

On peut mesurer la qualité du mélange à un instant donné  $n$  en estimant l'écart entre  $\mu_n$  et  $\pi$ . Une *distance*  $d$  entre ces probabilités est définie de la manière suivante :

$$d(\mu_n, \pi) = \max \{ |\mu_n(A) - \pi(A)|, A \subset \mathcal{S}_N \}.$$

- (1) Soient  $A$  une partie de  $\mathcal{S}_N$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E_n$  l'événement: "à l'instant  $n$  le paquet de cartes se trouve dans une configuration qui appartient à la partie  $A$ ."

- (a) Expliquer, en utilisant la question 7, l'égalité suivante:  $\mathbf{P}_{(T \leq n)}(E_n) = \pi(A)$ .

En déduire  $\mathbf{P}(E_n \cap (T \leq n)) = \pi(A) \mathbf{P}(T \leq n)$ .

- (b) Établir que  $\mathbf{P}(E_n \cap (T > n)) \leq \mathbf{P}(T > n)$ .

- (c) Montrer que

$$\mu_n(A) \leq \pi(A) + \mathbf{P}(T > n).$$

(2) Soit  $A$  une partie de  $\mathcal{S}_N$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\bar{A}$  l'événement contraire de  $A$ .

(a) Exprimer  $\mu_n(\bar{A}) - \pi(\bar{A})$  en fonction de  $\mu_n(A) - \pi(A)$ .

(b) Dédire des questions précédentes la majoration:

$$|\mu_n(A) - \pi(A)| \leq \mathbf{P}(T > n).$$

(3) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq d(\mu_n, \pi) \leq \mathbf{P}(T > n)$ . Déterminer la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\mu_n, \pi)$ .

## IV - Une majoration de $P(T > n)$

Dans cette partie, nous nous intéressons provisoirement à un collectionneur de timbres. Celui-ci reçoit chaque jour une lettre affranchie avec un timbre choisi au hasard uniformément parmi les  $N$  timbres en vigueur. On étudie ici le nombre de jours que doit attendre le collectionneur pour posséder la collection complète des  $N$  timbres. Le jour 0 il n'a aucun timbre.

On note alors:

- pour tout entier  $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$ ,  $S_k$  le nombre aléatoire de jours que doit attendre le collectionneur pour que le nombre de timbres différents qu'il possède passe de  $k - 1$  à  $k$ ,
- $S = S_1 + S_2 + \dots + S_N$ , soit la variable aléatoire correspondant au nombre de jours à attendre pour posséder la collection complète des  $N$  timbres,
- en supposant les  $N$  timbres en vigueur numérotés de 1 à  $N$ , pour tout  $j \in \llbracket 1; N \rrbracket$ ,  $B_j^m$  l'événement "le jour  $m$ , le collectionneur n'a toujours pas reçu de lettre affranchie avec le timbre numéro  $j$ ."

On admet que les variables aléatoires  $(S_k)_{k \in \llbracket 1; N \rrbracket}$  sont indépendantes.

(1) Déterminer la loi de  $S_1$ .

(2) Déterminer pour tout entier  $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$  la loi de la variable  $S_k$ .

(3) En déduire que la variable  $S$  suit la même loi de probabilité que la variable  $T$  étudiée dans les parties précédentes.

*Ce résultat sera utilisé pour estimer la quantité  $P(T > n)$ .*

(4) Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ .

(a) Exprimer l'événement  $(S > m)$  à l'aide des événements  $B_1^m, B_2^m, \dots, B_N^m$ .

(b) Que vaut  $\mathbf{P}(B_j^m)$  pour tout entier  $j \in \llbracket 1; N \rrbracket$ ?

(c) On rappelle que pour tout entier  $n \geq 2$  et pour toute famille d'événements  $A_1, \dots, A_n$ , on a l'inégalité:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

En déduire  $\mathbf{P}(S > m) < N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^m$ .

(5) (a) Montrer que  $\ln(1+x) \leq x$  pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$

(b) Dédire des résultats précédents la majoration

$$\forall m \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(T > m) \leq N e^{-\frac{m}{N}}.$$

(6) On reprend les notations introduites dans la partie précédente.

(a) Soit  $c > 0$  fixé. Montrer que pour  $n$  entier supérieur ou égal à  $N \ln N + cN$  on a :

$$d(\mu_n, \pi) \leq e^{-c}.$$

(b) *Application numérique.* On estime qu'une distance en variation à la loi uniforme de 0,2 est acceptable.

Avec un jeu de 32 cartes, combien de battages par insertions doit-on faire pour considérer le paquet mélangé de façon acceptable?