Partie I

1) Partons du côté droit de l'égalité demandée : $\sum_{k=1}^{k=i}\Delta_k = \Delta_1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{k=i}(T_k - T_{k-1})}_{\text{"dominos"}} = \Delta_1 + T_i - T_1 = T_1 + T_i - T_1 = T_i$.

Pour tout i compris entre 2 et N–1, Δ_i représente le temps que met la carte C_N à passer de la position $N-i+1$ à la position $N-i$.

2) J'introduis une notation supplémentaire : I_k est la variable aléatoire égale à la place à laquelle a lieu le k–ième insertion.

Avec cette notation : $(\Delta_1 > n) = (T_1 > n) = (I_1 < N) \cap (I_2 < N) \cap \cdots \cap (I_n < N)$: au cours de n premières insertions, la carte C_N n'a pas été déplacée , on n'a donc jamais choisi la position N .

Par indépendance : $P(\Delta_1 > n) = P(I_1 < N)P(I_2 < N)\cdots P(I_n < N)$

par équiprobabilité : $\forall i \in [\![1,m]\!] \quad P(I_1 < N) = P(I_2 < N) = P(I_i < N) = \dfrac{N-1}{N}$

$$P(\Delta_1 > n) = (P(I_i < N))^n = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n = \left(1-\frac{1}{N}\right)^n$$

On a ainsi $P(\Delta_1 = n) = P(\Delta_1 > n-1) - P(\Delta_1 > n) = \left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{n-1} - \left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n = \left(1-\left(1-\dfrac{1}{N}\right)\right)\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{n-1}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad P(\Delta_1 = n) = \left(\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}$$

La variable aléatoire Δ_1 suit une loi géométrique de paramètre $\left(\dfrac{1}{N}\right)$.

3) a) L'événement $(\Delta_i > n)$ est réalisé si une fois arrivée à la place $N-i+1$, la carte C_N reste à cette place plus de n insertions ; la carte C_N reste à cette place si les n insertions suivantes se font à une place inférieure ou égale à $N-i$; c'est-à-dire que les choix sont inférieurs ou égaux à $N-i$ plus de n fois :

en gardant la notation introduite dans la question précédente :

$$\forall n \qquad (\Delta_i > n) = (I_{a+1} \le N-i) \cap (I_{a+1} < N-i) \cap \cdots \cap (I_{a+n} < N-i)$$

si $\quad a = T_{i-1}(\omega)$

$$\forall n \qquad P(\Delta_i > n) = (P(I_a \le N-i))^n = \left(\frac{N-i}{N}\right)^n$$

$$P(\Delta_i = n) = P(\Delta_i > n-1) - P(\Delta_i > n) = \left(\frac{N-i}{N}\right)^{n-1} - \left(\frac{N-i}{N}\right)^{n} = \left(\frac{i}{N}\right)\left(1-\frac{i}{N}\right)^{n-1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad P(\Delta_i = n) = \left(\frac{i}{N}\right)\left(1-\frac{i}{N}\right)^{n-1}$$

La variable aléatoire Δ_i suit une loi géométrique de paramètre $\left(\frac{i}{N}\right)$.

Et en utilisant les résultats du cours : $E(\Delta_i) = \frac{N}{i}$; $\qquad V(\Delta_i) = \dfrac{\left(\frac{N-i}{N}\right)}{\left(\frac{i}{N}\right)^2} = \dfrac{N(N-i)}{i^2}$

4) a) On sait, voir question 1) que $T_2 = \Delta_1 + \Delta_2$ ainsi :

$$(T_2 = n) = ((\Delta_1 = 1) \cap (\Delta_2 = n-1)) \cup ((\Delta_1 = 2) \cap (\Delta_2 = n-2)) \cup \cdots \cup ((\Delta_1 = n-1) \cap (\Delta_2 = 1))$$

$$(T_2 = n) = \bigcup_{i=1}^{i=n-1} ((\Delta_1 = i) \cap (\Delta_2 = n-i))$$

par incompatibilité: $\qquad P(T_2 = n) = \sum_{i=1}^{i=n-1} P((\Delta_1 = i) \cap (\Delta_2 = n-i))$

par indépendance: $\qquad P(T_2 = n) = \sum_{i=1}^{i=n-1} P((\Delta_1 = i)) P((\Delta_2 = n-i))$

b) Utilisons la formule de somme des suites géométriques : $\sum_{k=1}^{k=n-1} q^k = \frac{q-q^n}{1-q}$

$$\sum_{k=1}^{k=n-1}\left(\frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}\right)^k = \frac{\left(\frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}\right)-\left(\frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}\right)} = \frac{\left(\frac{1-\frac{1}{N}}{\cancel{1-\frac{2}{N}}}\right)\left(1-\left(\frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}\right)^{n-1}\right)}{\frac{1-\frac{2}{N}-\left(1-\frac{1}{N}\right)}{\cancel{\left(1-\frac{2}{N}\right)}}} = \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)}{-\frac{1}{N}}\left(1-\left(\frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}\right)^{n-1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{k=n-1}\left(\frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}\right)^k = N\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(\left(\frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}\right)^{n-1} - 1\right)$$

v

c) Revenons à la formule de la question (a)

$$P(T_2=n)=\sum_{i=1}^{i=n-1}P((\Delta_1=i))P((\Delta_2=n-i))$$

$$P(T_2=n)=\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{i-1}\frac{2}{N}\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-i-1}$$

$$P(T_2=n)=\frac{2}{N^2}\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{-1}\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{i}\left(1-\frac{2}{N}\right)^{-i}=\frac{2}{N^2}\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{-1}\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{i}}{\left(1-\frac{2}{N}\right)^{i}}$$

$$P(T_2=n)=\frac{2}{N^2}\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{-1}N\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(\left(\frac{1-\frac{1}{N}}{1-\frac{2}{N}}\right)^{n-1}-1\right)=\frac{2}{N}\left(\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}-\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}\right)$$

5) Un petit schéma peut aider :

	Instant T_1	**Instant T_2 Deux possibilités**	
	Situation 1	Situation 2	Situation 3
Position N–2		**Carte C_N**	**Carte C_N**
Position N–1	Carte C_N	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{x}$
Position N	x	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$

On sait qu'il y a eu insertion en position N ou $N–1$ à l'instant T_2 :

Pour passer de la situation 1 à la situation 2, il faut avoir choisi l'insertion à la place N–1 ;

pour passer de la situation 1 à la situation 3, il faut avoir choisi l'insertion à la place N ;

ces deux insertions sont équiprobables , les deux situations 2 et 3 ont une probabilité de 0,5.

6) On remarque que seules les instants T_i sont intéressants, on fait de nouveau un tableau :

	Instant T_1	Instant T_2		Instant T_3					
		Situation a	Situation b	Situation 1	Situation 2	Situation 3	Situation 4	Situation 5	Situation 6
				Carte C_N	Carte C_N	Carte C_N	Carte C_N	Carte C_N	Carte C_N
Position N–2		Carte C_N	Carte C_N	a_3	a_1	a_1	a_3	a_2	a_2
Position N–1	Carte C_N	a_1	a_2	a_1	a_2	a_3	a_2	a_1	a_3
Position N	a_1	a_2	a_1	a_2	a_3	a_2	a_1	a_3	a_1

a) Il y a 6 situations possibles pour le triplet (a_1, a_2, a_3)

b) i) La situation a peut se transformer en situation 1, 2 ou 3 de manière équiprobable suivant la place de l'insertion T_3 : N , N–1 ou N–2 ; comme on a montré que la situation a a une chance sur deux de se produire, on en déduit que les 6 situations suivantes sont équiprobables.

7) On imagine qu'on réitère le raisonnement des deux questions précédentes. A l'instant T_{N-1}, la carte C_N est en haut du paquet et toutes les distributions des cartes suivantes sont équiprobables ; à l'instant T on prend la carte du dessus à savoir la carte C_N et on la place au hasard dans le paquet . Il est légitime de penser que toutes les distributions sont alors équiprobables.

Partie II

8) On reprend la définition de la variable aléatoire T : $T = T_{N-1} + 1 = \sum_{k=1}^{k=N-1} \Delta_k + 1$

Par linéarité de l'espérance : $E(T) = \sum_{k=1}^{k=N-1} E(\Delta_k) + 1 = \sum_{k=1}^{k=N-1} \frac{N}{k} + 1 = \sum_{k=1}^{k=N-1} \frac{N}{k} + \frac{N}{N}$

$$E(T) = \sum_{k=1}^{k=N} \frac{N}{k} = NH_N$$

Les variables aléatoires (Δ_k) sont mutuellement indépendantes, ainsi

$$V(T)=V\left(\sum_{k=1}^{k=N-1}\Delta_k+1\right)=V\left(\sum_{k=1}^{k=N-1}\Delta_k\right)=\left(\sum_{k=1}^{k=N-1}V(\Delta_k)\right)=N\sum_{k=1}^{k=N-1}\frac{N-k}{k^2}$$

$$V(T)=N\sum_{k=1}^{k=N}\frac{N-k}{k^2}\qquad\text{(on rajoute un terme nul)}$$

$$V(T)=N^2\sum_{k=1}^{k=N}\frac{1}{k^2}-N\sum_{k=1}^{k=N}\frac{1}{k}=N\left(\sum_{k=1}^{k=N}\frac{1}{k^2}\right)-NH_N$$

9) a) La fonction $t\longrightarrow\frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ ainsi :

$$\forall n>0\qquad \forall t\qquad n\le t\le n+1\Rightarrow\qquad \frac{1}{n+1}\le\frac{1}{t}\le\frac{1}{n}$$

Intégrons cette double inégalité entre n et $n+1$, les bornes sont dans l'ordre croissant :

$$\frac{1}{n+1}(n+1-n)\le\int_n^{n+1}\frac{1}{t}dt\le\frac{1}{n}(n+1-n)$$

$$\boxed{\frac{1}{n+1}\le\int_n^{n+1}\frac{1}{t}dt\le\frac{1}{n}}$$

b) On peut écrire l'inégalité ci-dessus sous la forme : $\forall n>0\ \frac{1}{n+1}\le\ln(n+1)-\ln(n)\le\frac{1}{n}\quad(*)$

i) $u_{n+1}-u_n=H_{n+1}-H_n-\ln(n+1)+\ln(n)=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln(n)$

$u_{n+1}-u_n\le 0$ (voir inégalité précédente)

ii) Dans l'inégalité (*) , remplaçons n par i puis sommons les inégalités (*) pour i variant de 1 à n :

$$\cancel{\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{i+1}\le}\qquad\sum_{i=1}^{i=n}\left(\ln(i+1)-\ln(i)\right)\le\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{i}$$

$$\Rightarrow\qquad \ln(n+1)-\ln(1)\le H_n$$

$$\Rightarrow\qquad \ln(n+1)\le H_n$$

et maintenant sommons les inégalités (*) pour i variant de 1 à n–1

$$\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{1}{i+1}\le\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\ln(i+1)-\ln(i)\right)\cancel{\le\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{1}{i}}$$

$$\Rightarrow H_n-1\le\ln(n)-\ln(1)=\ln(n)$$

$$\Rightarrow H_n\le\ln(n)+1\qquad(**)$$

En regroupant les deux inégalités : $\forall n>0\qquad \ln(n+1)\le H_n\le\ln(n)+1$

iii) Des inégalités précédentes on déduit que :

$u_n = H_n - \ln(n) \geq \ln(n+1) - \ln(n) \geq 0$ (par croissance de la fonction ln)

c) Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 ; elle converge vers un réel γ et $\gamma \geq 0$.

On sait de plus que : $\forall n > 0 \quad H_n \leq \ln(n)+1 \quad (**) \quad \Rightarrow \quad \forall n > 0 \quad u_n \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 1$;

nous avons bien montré que $\gamma \in [0,1]$.

10) a) Nous savons que :

$$\left.\begin{array}{l} E(T) = NH_N \\ \ln(N+1) \leq H_N \leq \ln(N)+1 \end{array}\right\} \Rightarrow N\ln(N+1) \leq E(T) \leq N\ln(N)+N$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(N+1)}{\ln(N)} \leq \frac{E(T)}{N\ln(N)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(N)} \qquad (N > 1 \text{ donc } \ln(N) > 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\ln\left(N\left(1+\frac{1}{\ln(N)}\right)\right)}{\ln(N)} \leq \frac{E(T)}{N\ln(N)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(N)}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(N) + \ln\left(1+\frac{1}{\ln(N)}\right)}{\ln(N)} \leq \frac{E(T)}{N\ln(N)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(N)}$$

$$\Rightarrow 1 + \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\ln(N)}\right)}{\ln(N)}}_{\downarrow \atop 1} \leq \frac{E(T)}{N\ln(N)} \leq 1 + \underbrace{\frac{1}{\ln(N)}}_{\downarrow \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini} \atop 1}$$

Et par le théorème des encadrements $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\frac{E(T)}{N\ln(N)}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad E(T) \underset{N\to+\infty}{\sim} N\ln(N)$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \gamma \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - \gamma) = 0$

Posons $\varepsilon_n = u_n - \gamma$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

$H_N = u_N + \ln(N) = \ln(N) + \gamma + \varepsilon_N$

$\boxed{E(T) = N\ln(N) + \gamma N + N\varepsilon_N}$

$\boxed{E(T) = N\ln(N) + \gamma N + o(N)}$

b) $\frac{V(T)}{N^2} = \sum\limits_{k=1}^{k=N} \frac{1}{k^2} - \frac{H_N}{N}$; la série de terme général $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k>0}$ est une série de référence : elle est convergente et le terme général $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k>0}$ est positif ; on en déduit que la suite $\left(\sum_{k=1}^{k=N}\frac{1}{k^2}\right)_{N>0}$ est croissante et converge vers un réel α strictement positif ; ainsi $\sum_{k=1}^{k=N}\frac{1}{k^2}\le\alpha$ et $\frac{V(T)}{N^2}\le\alpha$ soit $V(T)\le\alpha N^2$.

de plus $\ln(N+1)\le H_N\le\ln(N)+1$

$$\Rightarrow \underset{\downarrow\atop 0}{\frac{\ln(N+1)}{N}}\le\frac{H_N}{N}\le\underset{\downarrow\atop 0}{\frac{\ln(N)}{N}}+\underset{\downarrow\atop 0}{\frac{1}{N}}$$

(par croissances comparées)

par le théorème des encadrements $\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{H_N}{N}\right)=0$

ainsi $\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{V(T)}{N^2}\right)=\alpha$ avec α strictement positif.

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{V(T)}{N^2}\right)=\alpha \quad\Rightarrow\quad \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{V(T)}{\alpha N^2}\right)=1 \quad\Rightarrow\quad V(T)\underset{N\to+\infty}{\sim}\alpha N^2$$

11) a) Rappelons que $E(T)=NH_N=Nu_N+N\ln N$

$$T(\omega)-E(T)=T(\omega)-Nu_N-N\ln N$$

$$T(\omega)-N\ln N=\left(T(\omega)-E(T)\right)-\left(Nu_N\right)$$

par inégalité triangulaire

$$\left|T(\omega)-N\ln N\right|\le\left|T(\omega)-E(T)\right|+\left|Nu_N\right|$$

$$\left|T(\omega)-N\ln N\right|\le\left|T(\omega)-E(T)\right|+N \qquad \text{car} \quad 0\le u_N\le 1$$

Supposons que $\omega\in\left(\left|T-N\ln(N)\right|\ge cN\right)$

alors $\left|T(\omega)-N\ln(N)\right|\ge cN$

alors $\left|T(\omega)-E(T)\right|+N\ge cN$

alors $\left|T(\omega)-E(T)\right|\ge(c-1)N$

alors $\omega\in\left(\left|T-E(T)\right|\ge(c-1)N\right)$

On peut en conclure l'inclusion suivante :

$$\left(\left|T-N\ln(N)\right|\ge cN\right)\subset\left(\left|T-E(T)\right|\ge(c-1)N\right)$$

On sait que pour tout événement A et B on a : $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Ici : $P\left(\left|T - N\ln(N)\right| \geq cN\right) \leq \underbrace{P\left(\left|T - E(T)\right| \geq (c-1)N\right) \leq \dfrac{V(T)}{(c-1)^2 N^2}}_{\text{Bienaymé Tchebishev}}$

$$P\left(\left|T - N\ln(N)\right| \geq cN\right) \leq \frac{\alpha^2}{(c-1)^2}$$

Ou encore, une probabilité étant positive $0 \leq P\left(\left|T - N\ln(N)\right| \geq cN\right) \leq \dfrac{\alpha^2}{(c-1)^2}$ et par le théorème des

encadrements $\lim\limits_{c \to +\infty} P\left(\left|T - N\ln(N)\right| \geq cN\right) = 0$

12) Revenons à l'inégalité de la question précédente et remplaçons la constante c par $\varepsilon \ln(N)$ .le résultat de la question précédente est valable pour c strictement supérieur à 1, nous prenons N strictement supérieur à $e^{\frac{1}{\varepsilon}}$

$N > e^{\frac{1}{\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq P\left(\left|T - N\ln(N)\right| \geq \varepsilon \ln(N) N\right) \leq \dfrac{\alpha^2}{\left(\varepsilon \ln(N) - 1\right)^2}$; et à nouveau par le théorème des

encadrements : $\lim\limits_{N \to +\infty} P\left(\left|T - N\ln(N)\right| \geq \varepsilon \ln(N) N\right) = 0$

Partie III

13) Voilà le programme tel qu'on peut le compléter

```
PROGRAM ESSEC2011 ;
TYPE Paquet=ARRAY[1..32] OF INTEGER ;
VAR   Jeu : Paquet ;
      S , i  : INTEGER ;

PROCEDURE INIT ( VAR Jeu : Paquet) ;
VAR i : INTEGER ;
BEGIN
FOR i :=1 TO 32       DO   Jeu[i] :=i ;
END ;

PROCEDURE Insertion(VAR Jeu : Paquet) ;
VAR i, k, cartedessus : INTEGER ;
BEGIN
    k := RANDOM(32)+1 ;
    cartedessus := Jeu[1] ;
    IF k>1   THEN  FOR i :=1  TO  k–1  DO  Jeu[i] :=jeu[i+1] ;
    Jeu[k] :=cartedessus ;
END ;

FUNCTION T(Jeu :Paquet) : INTEGER ;
VAR n : INTEGER ;
BEGIN
    Init(Jeu) ;
    n :=0 ;
    WHILE  Jeu[1]<>32  DO
    BEGIN
            Insertion(Jeu) ;
            n := n+1 ;
    END ;
    T := n ;
END ;


BEGIN
S :=0 ;
FOR i :=1 TO 100    DO    S := S + T(Jeu) ;
WRITELN( 'moyenne des valeurs prises par T' ,  S/100) ;
END.
```

c) La fonction T simule des insertions et renvoie le nombre (aléatoire) d'insertions nécessaires à amener la carte du dessous en première place.

Partie III

14) a) Si on sait que la condition $T \le n$, en vertu de la remarque de la question 7, à l'instant *n,* le paquet est distribué de sorte que toutes les configurations sont équiprobables ainsi : $P_{T\le n}(E_n) = \pi(A)$

En revenant à la définition des probabilités conditionnelles : $P_{T\le n}(E_n) = \dfrac{P(E_n \cap (T \le n))}{P(T \le n)} = \pi(A)$

$$\Rightarrow P(E_n \cap (T \le n)) = \pi(A) P(T \le n)$$

b): $(E_n \cap (T > n)) \subset (T > n)$

$$\Rightarrow P(E_n \cap (T > n)) \le P(T > n)$$

c) $\mu_n(A) = \sum_{\sigma\in A} \mu_n(\{\sigma\}) = P(E_n)$

$P(E_n) = P(E_n \cap (T > n)) + P(E_n \cap (T \le n))$ formule des probabilités totales

$P(E_n) \le P(T > n) + \pi(A) P(T \le n) \le P(T > n) + \pi(A)$

$\mu_n(A) \le P(T > n) + \pi(A)$

15) a) $\left.\begin{array}{l} \mu_n(\overline{A}) = 1 - \mu_n(A) \\ \pi(\overline{A}) = 1 - \pi(A) \end{array}\right\} \Rightarrow \mu_n(\overline{A}) - \pi(\overline{A}) = \pi(A) - \mu_n(A) = -(\mu_n(A) - \pi(A))$

b) L'inégalité de la question i) est valable pour toute partie A donc aussi pour $\overline{A}$:

$\mu_n(\overline{A}) \le P(T > n) + \pi(\overline{A})$

$\mu_n(\overline{A}) - \pi(\overline{A}) \le P(T > n)$

$\Rightarrow \pi(A) - \mu_n(A) \le P(T > n)$

$\Rightarrow \mu_n(A) - \pi(A) \ge -P(T > n)$

$\Rightarrow -P(T > n) \le \mu_n(A) - \pi(A) \le P(T > n)$

$\Rightarrow |\mu_n(A) - \pi(A)| \le P(T > n)$

16) La majoration précédente est valable pour toutes les parties A , et le nombre de parties A étant fini, on peut écrire que : $0 \le d(\mu_n, \pi) \le P(T > n)$

Partie III

17) La variable aléatoire S_1 est la variable aléatoire constante égale à 1, car on est sûr d'avoir un nouveau timbre au premier achat.

18) Pour $k\ge 2$, la variable aléatoire S_k est le temps d'attente d'un nouveau timbre quand on a k–1 timbres différents.

S_k est la variable aléatoire égale au temps d'attente du premier succès quand le succès est d'obtenir un timbre non encore dans la collection (il y en a $N-(k-1)$) la probabilité de succès est égale à : $\dfrac{N-(k-1)}{N}$.

La variable aléatoire S_k suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{N-(k-1)}{N}$.

19) La variable aléatoire $S-S_1=S-1=S_2+S_3+\cdots+S_N$ est ainsi une somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres : $\dfrac{N-1}{N},\dfrac{N-2}{N},\dfrac{N-3}{N},\cdots,\dfrac{1}{N}$, c'est exactement ce qui se passe pour la variable aléatoire T_N ainsi S–1 suit la même loi que T_N et S suit la même loi que T.

20) a) $(S>m)=B_1^m\cup B_2^m\cup B_3^m\cup\cdots B_{N-1}^m\cup B_N^m$

b) L'événement B_j^m est réalisé si au cours des m premiers tirages, on n'a pas acheté le timbre n°j :

$$P\left(B_j^m\right)=\left(\frac{N-1}{N}\right)^m$$

c) $(S>m)=B_1^m\cup B_2^m\cup B_3^m\cup\cdots B_{N-1}^m\cup B_N^m$

$$\Rightarrow P(S>m)\le NP\left(B_j^m\right)=N\left(\frac{N-1}{N}\right)^m$$

21) a) On peut étudier rapidement la fonction $x\longrightarrow\ln(1+x)-x$ sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ ou utiliser un argument de concavité.

b)

$$\left.\begin{array}{l} P(T>m)=P(S>m)\le N\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^m \\ \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^m=\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^m=e^{m\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)}\le e^{-m\frac{1}{N}} \\ \text{On fait remarquer que } -\dfrac{1}{N}\in]-1,+\infty[\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{P(T>m)\le Ne^{-m\frac{1}{N}}}$$

22) a) $0\le d(\mu_n,\pi)\le P(T>n)\le Ne^{-n\frac{1}{N}}$

Si $n\ge N\ln(N)+cN$, $n\ge N\ln(N)+cN \quad\Rightarrow\quad -n\le-(N\ln(N)+cN)$

$$\Rightarrow\quad 0\le d(\mu_n,\pi)\le P(T>n)\le Ne^{-n\frac{1}{N}}\le Ne^{-(N\ln(N)+cN)\frac{1}{N}}$$

$$Ne^{-(N\ln(N)+cN)\frac{1}{N}}=Ne^{-(\ln(N)+c)}\le Ne^{-\ln(N)}e^{-c}=N\frac{1}{N}e^{-c}=e^{-c}$$

$$\Rightarrow\quad 0\le d(\mu_n,\pi)\le e^{-c}$$

b) Application numérique : N=32 ; $e^{-c}=0,2 \Rightarrow -c=\ln(0,2) \Rightarrow c=\ln\left(\frac{1}{0,2}\right)=\ln 5$;

et $n \geq 32\ln(32)+(\ln 5)32=32\ln(160)$.