ECE 2 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°3

Durée : 4 heures

Exercice 1.

On désigne par $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe le produit AM.

I - Premiers résultats sur l'application φ_A et la matrice A

(1) Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(2) Montrer que si l'endomorphisme φ_A est bijectif, alors il existe une unique matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$, où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2.
(3) Montrer que l'application φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **si et seulement si** la matrice A est inversible.

II - Un exemple

Dans cette partie et uniquement cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
(2) Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) Préciser les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de l'endomorphisme φ_A.
(4) L'endomorphisme φ_A est-il diagonalisable ?

III - D'autres résultats sur l'application φ_A et la matrice A

On désigne par $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes à 2 lignes.

(1) Soit un réel λ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant :

$$\varphi_A(M) = \lambda M.$$

Montrer par un raisonnement par l'absurde que la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

(2) Soit un réel μ tel qu'il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $AX = \mu X$.
On note

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N' = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Montrer que N et N' sont des vecteurs propres de l'endomorphisme φ_A associés à la valeur propre μ.

(3) Comparer le spectre de l'endomorphisme φ_A et le spectre de la matrice A.

(4) Montrer que si la matrice A est diagonalisable, alors l'endomorphisme φ_A est diagonalisable.

Exercice 2

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} \mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que I_0, I_1 et I_2 sont des intégrales convergentes et préciser leur valeur.

(2) Soient $a > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. On pose

$$I_k(a) = \int_0^a t^k e^{-t} \mathrm{d}t.$$

(a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$I_{k+1}(a) = (k+1) I_k(a) - a^{k+1} e^{-a}.$$

(b) En déduire que I_3 et I_4 sont des intégrales convergentes et que $I_3 = 6$ et $I_4 = 24$.

(3) Déduire des questions précédentes que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} \mathrm{d}t$$

converge et que

$$\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} \mathrm{d}t = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24.$$

Exercice 3.

Partie I - Étude d'une fonction f.

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-x}}{x}, & \text{si } x > 0 \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(1) À l'aide du développement limité de la fonction exponentielle, écrire le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0. En déduire que f est continue sur $[0; +\infty[$.

(2) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

(3) Justifier la dérivabilité de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis déterminer la fonction φ telle que :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

(4) Étudier les variations de φ. En déduire le tableau de variation f qui sera complété par la limite de f en $+\infty$.

Partie II - Étude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u.$$

(1) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \geq \frac{1}{e}\ln(n+1).$$

Donner la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(2) Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(3) Utiliser un changement de variable affine pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq \int_0^n \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u - u_n \leq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(4) Donner alors un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème.

Partie 1 : Étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

(1) Donner la loi de X_1, ainsi que l'espérance $E(X_1)$ de la variable X_1.
On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3} \quad P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}.$$

(2) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n.

(3) (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}\left(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right).$$

(b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

(c) Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$ et en déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}.$$

(d) Établir alors que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n;$$

(4) (a) En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}\left(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right).$$
(b) En déduire une relation entre $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_n = 2)$.
(c) Montrer enfin que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

(5) On admet que, pour tout entier naturel n, on a :
$$P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}.$$
En déduire sans calcul que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

(6) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'espérance $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

Partie 2 : Étude des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-**ligne** de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:
$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) & P(X_n = 4) \end{pmatrix}$$

(7) (a) Montrer (grâce à certains résultats de la Partie 1) que, si l'on pose
$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n\ A$.
(b) Établir par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = U_0\ A^n$.
(c) En déduire la première ligne de A^n.

(8) Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n, puis écrire ces trois lignes.

Partie 3 : Une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(9) Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

(10) (a) Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k = 4^{k-1}J$.
(b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J.
(c) Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$.