Concours Blanc n°3

Solution

Exercice 1 (D'après ECRICOME 2015).

On désigne par $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe le produit AM.

I. Premiers résultats sur l'application φ_A et la matrice A

(1)
- Il est clair que si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\varphi_A(M) = AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Démontrons que φ_A est linéaire. Soient M et N deux élements de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et λ un réel, $\varphi_A(M+\lambda N) = A(M+\lambda N) = AM + \lambda AN = \varphi_A(M) + \lambda\varphi_A(N)$.

Ainsi, φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(2) Supposons que φ_A est bijectif.
$AN = I_2 \Leftrightarrow \varphi_A(N) = I_2$. Or φ_A étant bijectif il existe une unique matrice N solution de cette équation. Ainsi, il existe une unique matrice N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$.

(3) $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors d'après la question précédente, il existe une unique matrice N tel que $AN = I_2$. Autrement dit A est inversible.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que A est inversible.
$M \in \mathrm{Ker}(\varphi_A) \Leftrightarrow \varphi_A(M) = 0 \Leftrightarrow AM = 0 \Leftrightarrow A^{-1}AM = 0 \Leftrightarrow M = 0$
Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi_A) = \{0\}$ et puisque φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, φ_A est bijectif et c'est donc un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
<u>Bilan :</u> φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ssi A est inversible.

II. Un exemple

(1) A est une matrice triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux 1 et -1. Ainsi, A est une matrice d'ordre 2 qui admet deux valeurs propres, donc elle est diagonalisable.

(2)
- $\varphi_A\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = E_{11}$
- $\varphi_A\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = E_{12}$
- $\varphi_A\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0\\-1&0\end{pmatrix} = -2E_{11} - E_{21}$
- $\varphi_A\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&2\\0&-1\end{pmatrix} = 2E_{12} - E_{22}$

Ainsi, la matrice de φ_A dans la base $\mathcal{B}$ est : $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(3) T est une matrice trangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux soient 1 et -1.

- Recherche de E_{-1} : Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

  $X \in E_{-1} \Leftrightarrow TX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = -a \\ b + 2d = -b \\ -c = -c \\ -d = -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = -d \end{cases}$ Ainsi, $X = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ -a \\ b \end{pmatrix}$. Ainsi, le sous -espace propre associé à la valeur propre 1 de T est $\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ et le sous-espace propre de φ_A associé à la valeur propre -1 est $\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

- Recherche de E_1 : Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

  $X \in E_1 \Leftrightarrow TX = X \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = a \\ b + 2d = b \\ -c = c \\ -d = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$ Ainsi, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, le sous -espace propre associé à la valeur propre 1 de T est $\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ et le sous-espace propre de φ_A associé à la valeur propre 1 est $\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

(4) Les deux sous-espaces E_1 et E_{-1} sont chacun clairement de dimension 2. Donc $\dim(E_1)+\dim(E_{-1})=4=\dim$ ainsi φ_A est diagonalisable.

III. D'autres résultats sur l'application φ_A et la matrice A

(1) Soit λ un réel tel que il existe une matrice M non nulle telle que $\varphi_A(M) = \lambda M$. Supposons que $A - \lambda I_2$ est inversible.
On a $AM = \lambda M \Rightarrow AM - \lambda M = 0 \Rightarrow (A - \lambda I_2)M = 0 \Rightarrow (A - \lambda I_2)^{-1}(A - \lambda I_2)M = 0 \Rightarrow M = 0$ absurde!!
Ainsi $A - \lambda I_2$ est non inversible.

(2) $AX = \mu X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ autrement dit $\begin{cases} ax + by = \mu x \\ cx + dy = \mu y \end{cases}$
$\varphi_A(N) = A \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by & 0 \\ cx + dy & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x & 0 \\ \mu y & 0 \end{pmatrix} = \mu N$; ainsi N est un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ.
$\varphi_A(N') = A \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ax + by \\ 0 & cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu 0 & x \\ \mu 0 & y \end{pmatrix} = \mu N'$; ainsi N' est un vecteur propre de A

associé à la valeur propre μ.

(3) D'après la question 1, si λ est valeur propre de φ_A alors λ est valeur propre de A, ainsi $\mathrm{Spec}(\varphi_A) \subset \mathrm{Spec}(A)$.
Puis d'après la question 2., si μ est une valeur propre de A alors μ est aussi une valeur propre de φ_A. Ainsi, Spec(A)$\subset$ Spec(φ_A).
Bilan : $\boxed{\mathrm{Spec}(\varphi_A)=\mathrm{Spec}(A)}$

(4) Supposons que A est diagonalisable, alors la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut 2. Or d'après la question 2, à chaque vecteur propre de A correspond au moins deux vecteurs propres distincts de φ_A. Ainsi la somme des dimensions des sous-espaces propres de φ_A et supérieure ou égale à 4, donc est égale à 4 et φ_A est diagonalisable.

Exercice 2. (D'après EDHEC 2015)

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} \mathrm{d}t.$$

(1) Il s'agit d'intégrales classiques. Il est possible d'utiliser les résultats du cours sur la loi exponentielle. Ceux-ci n'étant pas été rappelés à ce stade de l'année, on propose une preuve complète. Il faut donc montrer que, si $A > 0$, les trois intégrales
$$\int_0^A e^{-t} \mathrm{d}t, \qquad \int_0^A te^{-t} \mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad \int_0^A t^2 e^{-t} \mathrm{d}t$$
admettent une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$. Pour la première, c'est un calcul direct de primitive. Pour les deux autres, il s'agit d'intégrations par parties (**qu'on peut appliquer car** $u = t^k$ et $v = e^{-t}$ **sont de classe** $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$)
$$\int_0^A e^{-t} \mathrm{d}t : \left[-e^{-t}\right]_0^A = 1 - e^{-A} \longrightarrow 1,\ A \to +\infty.$$
$$\begin{aligned} \int_0^A te^{-t} \mathrm{d}t &= \left[-te^{-t}\right]_0^A + \int_0^A e^{-t} \mathrm{d}t \\ &= -Ae^{-A} + 1 - e^{-A} \\ &\longrightarrow 1,\ A \to +\infty \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} \int_0^A t^2 e^{-t} \mathrm{d}t &= \left[-t^2 e^{-t}\right]_0^A + 2\int_0^A te^{-t} \mathrm{d}t \\ &= -A^2 e^{-A} + 2\left(-Ae^{-A} + 1 - e^{-1}\right) \\ &\longrightarrow 2,\ A \to +\infty \end{aligned}$$
donc les trois intégrales convergent et
$$I_0 = I_1 = 1, \quad I_2 = 2.$$

(2) Soient $a > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. On pose
$$I_k(a) = \int_0^a t^k e^{-t} \mathrm{d}t.$$

(a) On fait comme précédemment et suggéré par le texte, une IPP (**qu'on peut appliquer car** $u = t^k$ et $v = e^{-t}$ **sont de classe** $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} I_{k+1}(a) &= \int_0^a t^{k+1}e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \left[-t^{k+1}e^{-t}\right]_0^a + (k+1)\int_0^a t^k e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= -a^{k+1}e^{-a} + (k+1)I_k(a) \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(b) Il suffit de passer à la limite quand a tend vers $+\infty$. Plus précisément, d'après la question précédente

$$I_3 = \lim_{a \to +\infty} I_3(a)$$

et

$$I_3(a) = 3I_2(a) - a^3e^{-a} \longrightarrow 3I_2 = 6.$$

De même,

$$I_4 = \lim_{a\to+\infty} I_4(a) = \lim_{a\to+\infty}\left(4I_3(a) - a^4e^{-a}\right) = 4I_3 = 24.$$

(3) La convergence s'obtient de mille et une façons mais un argument d'équivalence convient

$$(y + xt + t^2)^2e^{-t} \underset{+\infty}{\sim} t^4e^{-t}$$

et par convergence de I_4, on a également convergence de notre intégrale. Pour le calcul explicite, il faut développer

$$(y + xt + t^2)^2 = y^2 + 2xyt + (x^2 + 2y)t^2 + 2xt^3 + t^4$$

et donc, par linéarité de l'intégrale, pour $a > 0$

$$\int_0^a (y + xt + t^2)^2e^{-t}\mathrm{d}t = y^2I_0(a) + 2xyI_1(a) + (x^2 + 2y)I_2(a) + 2xI_3(a) + I_4(a).$$

On passe à la limite quand $a \longrightarrow +\infty$ et on obtient

$$\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2e^{-t}\mathrm{d}t = y^2I_0 + 2xyI_1 + (x^2 + 2y)I_2 + 2xI_3 + I_4 = y^2 + 2xy + 2x^2 + 4y + 12x + 24,$$

ce qui correspond bien à la formule attendue.

Exercice 3. (D'après ECRICOME 2012)

Exercice 1.

Partie I - Étude d'une fonction f.

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-x}}{x}, & \text{si } x > 0 \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(1) Le développement limité de l'exponentielle en 0 permet d'écrire que, au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1-(1-x+x^2/2+o(x^2))}{x} \\ &= \frac{x-x^2/2+o(x^2)}{x} \\ &= 1-\frac{x}{2}+o(x) \\ &\longrightarrow 1=f(0),\ x\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

et f est bien continue en 0. Sur $]0;+\infty[$, f est un quotient de fonctions usuelles continues dont le dénominateur ne s'annule pas donc f y est continue. Au final, f est continue sur $[0;+\infty[$.

(2) Il faut montrer que le taux d'accroissement en 0 admet une limite lorsque x tens vers 0. On utilise encore le développement limité précédent. Pour x proche de 0

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{1-x/2+o(x)-1}{x} \\ &= -\frac{1}{2}+o(1) \\ &\longrightarrow -\frac{1}{2},\ x\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=-1/2$.

(3) Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, f est dérivable comme quotient de fonctions usuelles dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Les formule de dérivation donnent, pour $x>0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{-x}x-(1-e^{-x})}{x^2} \\ &= \frac{(x+1)e^{-x}-1}{x^2} \\ &= \frac{\varphi(x)}{x^2}, \end{aligned}$$

où on a naturellement posé $\varphi(x)=(x+1)e^{-x}-1$.

(4) Le signe de $f'(x)$ est bien évidemment donné par celui de $\varphi(x)$ d'où l'intérêt d'étudier la fonction. C'est une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ (en fait sur $[0;+\infty[$) et on a, pour tout $x>0$,

$$\varphi'(x)=-xe^{-x}<0$$

Ainsi φ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. La fonction φ étant finalement définie et continue sur $[0;+\infty[$, elle y est strictement décroissante aussi. Comme $\varphi(0)=0$, on en déduit que $\varphi(x)<0$, pour tout $x<0$. Ainsi, $f'(x)<0$ pour tout $x>0$, et en fait - vu que $f'(0)=-1/2$ - pour tout $x\geq 0$. Au final, f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. Comme l'exponentielle tend vers 0 en $-\infty$, l'algèbre des limites nous donne que $f(x)$ tens vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et on peut dresser le tableau de variations:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	1	0

Partie II - Étude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u.$$

(1) La fonction $u \mapsto e^{-u/n}$ est décroissante sur $[0;+\infty[$. Son minimum sur l'intervalle $[0;n]$ est atteint en n, ou encore, pour tout $u \in [0;n]$,

$$e^{-\frac{u}{n}} \geq e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Par positivité de l'intégrale (on intègre entre 0 et n dans l'ordre croissante), on obtient que

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^n \frac{e^{-u/n}}{1+u}\mathrm{d}u \\ &\geq \int_0^n \frac{1}{e} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \\ &= \frac{1}{e}[\ln(1+u)]_0^n \\ &= \frac{\ln(1+n)}{e}, \end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité demandée. Comme $\ln(n+1) \longrightarrow +\infty$, $n \to +\infty$, on déduit, par comparaison, que $u_n \longrightarrow +\infty$, $n \to +\infty$.

(2) L'intégrale étudiée est *a priori* impropre en 0. Mais en fait, la fonction f est continue sur $[0;1]$ d'après la partie précédente. L'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné étant bien définie, on conclue donc à l'existence de celle-ci.

(3) Il est clair (par positivité de l'exponentielle et de l'intégrale) que

$$\int_0^n \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \leq u_n.$$

Pour l'autre inégalité, on a

$$\begin{aligned} \int_0^n \frac{\mathrm{d}u}{1+u} - u_n &= \int_0^n \left(\frac{1}{1+u} - \frac{e^{-u/n}}{1+u}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^n \frac{1-e^{-u/n}}{1+u}\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Il apparait alors naturel d'utiliser le changement de variables affine $t = u/n$ qui donne $u = nt$ et $\mathrm{d}u = n\mathrm{d}t$. Il suit que

$$\int_0^n \frac{1-e^{-u/n}}{1+u}\mathrm{d}u = n\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{1+nt}\mathrm{d}t.$$

On a ensuite envie de majorer

$$\frac{n}{1+nt} \leq \frac{n}{nt} = \frac{1}{t}$$

pour obtenir l'inégalité souhaitée. La preuve, un peu subtile, doit néanmoins être rigoureuse, car $1/t$ n'est pas *intégrable* entre 0 et 1. On fixe donc $\varepsilon > 0$. Il est clair que, d'une part

$$n\int_\varepsilon^1 \frac{1-e^{-t}}{1+nt}\mathrm{d}t \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} n\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{1+nt}\mathrm{d}t$$

mais qu'aussi

$$n\int_\varepsilon^1 \frac{1-e^{-t}}{1+nt}\mathrm{d}t \leq \int_\varepsilon^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^1 f(t)\mathrm{d}t \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

car la dernière intégrale est convergente. En combinant tout cela, on obtient que

$$n\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{1+nt}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

ce qui donne bien l'encadrement souhaité.

(4) On sait calculer

$$v_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln(n+1)$$

et que $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est une constante que, même si on n'en connait pas la valeur, on peut noter $c > 0$. La question précédente donne alors

$$0 \leq v_n - u_n \leq c \Longleftrightarrow 0 \leq 1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)} \leq \frac{c}{\ln(n+1)}.$$

Par le théorème des gendarmes, on voit donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n+1)} = 1 \Longrightarrow u_n \sim_{+\infty} \ln(n+1).$$

Problème. (D'après EDHEC 2017)

Partie 1 : Étude d'une variable aléatoire

(1) On a $X_1(\Omega) = \{2,3,4\}$ et $\forall k \in \{2,3,4\} \quad P(X_1 = k) = \dfrac{1}{3}$ par équiprobabilité des déplacements. X_1 suit une loi uniforme sur $\{2,3,4\}$, on a donc $E(X_1) = 3 \quad$ (milieu de $\{2,3,4\}$.

(2) A priori, tous les points sont possibles à atteindre en n déplacements (sauf 1 pour $n = 1$). Prouvons rigoureusement par récurrence que $(H_n) \quad X_n(\Omega) = \{1,2,3,4\}$ pour $n \geq 2$.
• Pour $n = 2$, d'après le résultat admis, on a $X_2(\Omega) = \{1,2,3,4\}$. Donc (H_2) est vrai.
• Supposons (H_n) vrai, en n déplacements on peut donc être en $i \quad (i \in \{1,2,3,4\}$, au n-ième déplacement, on sera alors en $j \in \{1,2,3,4\} - \{i\}$. En envisageant deux valeurs distinctes de i, on obtient toutes les valeurs possibles dans $\{1,2,3,4\}$. Donc (H_{n+1}) est vrai.
Ce qui assure que (H_n) est vrai pour tout $n \geq 2$
$\boxed{\forall n \geq 2 \quad X_n(\Omega) = \{1,2,3,4\}}$

(3) (a) Pour $n \geq 2$, on peut utiliser le système complet d'événements $(X_n = i)_{i\in[\![1,4]\!]}$.
La formule des probabilités totales donne :

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{i=1}^{4} P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = 1)P(X_n = i)$$

Or $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = 0$ et $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = i) = \dfrac{1}{3}$ si $i \neq 1$ donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}\left(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right)$$

(b) Pour $n = 0$, $P(X_1 = 1) = 0 \quad$ et $\dfrac{1}{3}\left(P(X_0 = 2) + P(X_0 = 3) + P(X_0 = 4)\right) = \dfrac{1}{3}\ (0 + 0 = 0) = 0$, donc la relation est encore vraie.
Pour $n = 1$, $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{3}\left(P(X_1 = 2) + P(X_1 = 3) + P(X_1 = 4)\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$
La relation est donc encore vraie pour $n = 1$.

(c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$ car c'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ et vraie aussi pour $n \geq 2$ car $(X_n = i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ est un système complet

d'événements.
$P(X_{n+1}=1)=\frac{1}{3}(1-P(X_n=1))=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}P(X_n=1)$ ce qui est la relation cherchée.

(d) Posons $v_n=P(X_n=1)$. (v_n) vérifie $v_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$ (1) $v_{n+1}=-\frac{1}{3}v_n+\frac{1}{3}$

C'est une suite arithmético géométrique. Cherchons un point fixe α. (2) $\alpha=-\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3}$

(2) donne $\frac{4}{3}\alpha=\frac{1}{3}$ donc $\alpha=\frac{1}{4}$

En faisant (1) − (2) on obtient $v_{n+1}-\alpha=-\frac{1}{3}(v_n-\alpha)$ donc

$v_n-\alpha=\left(-\frac{1}{3}\right)^n(v_0-\alpha)=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(1-\frac{1}{4}\right))=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

On a bien : $\forall n\in\mathbb{N}\quad P(X_n=1)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

(4) (a) Pour $n\geq 2$, on peut utiliser le système complet d'événements $(X_n=i)_{i\in[\![1,4]\!]}$.
La formule des probabilités totales donne :

$P(X_{n+1}=2)=\sum_{i=1}^{4}P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=2)P(X_n=i)$

Or $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=0$ et $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=i)=\frac{1}{3}$ si $i\neq 2$ donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(X_{n+1}=2)=\frac{1}{3}\left(P(X_n=1)+P(X_n=3)+P(X_n=4)\right)$$

Pour $n=0$, $P(X_1=2)=\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}\left(P(X_0=1)+P(X_0=3)+P(X_0=4)\right)=\frac{1}{3}\ (1+0=0)=0$, donc la relation est encore vraie.

Pour $n=1$, $P(X_2=1)=\frac{2}{9}$ et $\frac{1}{3}\left(P(X_1=1)+P(X_1=3)+P(X_1=4)\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$

La relation est donc encore vraie pour $n=1$.En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad P(X_{n+1}=2)=\frac{1}{3}\left(P(X_n=1)+P(X_n=3)+P(X_n=4)\right)$$

(b) $P(X_{n+1}=2)=\frac{1}{3}(1-P(X_n=2))=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}P(X_n=2)$.

(c) Posons $w_n=P(X_n=2)$. (v_n) vérifie $w_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$ (1) $w_{n+1}=-\frac{1}{3}w_n+\frac{1}{3}$

C'est une suite arithmético-géométrique. On a le même point fixe que pour v_n : $\alpha=\frac{1}{4}$

(2) donne $\frac{4}{3}\alpha=\frac{1}{3}$ donc $\alpha=\frac{1}{4}$

En faisant (1) − (2) on obtient $w_{n+1}-\alpha=-\frac{1}{3}(w_n-\alpha)$ donc

$w_n-\alpha=\left(-\frac{1}{3}\right)^n(w_0-\alpha)=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{4}\right))=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

On a bien : $\forall n\in\mathbb{N}\quad P(X_n=2)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

(5) On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$P(X_{n+1}=3)=-\frac{1}{3}P(X_n=3)+\frac{1}{3}\quad\text{et}\quad P(X_{n+1}=4)=-\frac{1}{3}P(X_n=4)+\frac{1}{3}$$

Les suites définies par $P(X_n=3)$ et $P(X_n=4)$ ont la même relation de récurrence que $P(X_n=2)$ et la même valeur initiale 0. On a donc : $\forall n\in\mathbb{N} P(X_n=3)=P(X_n=4)=P(X_n=2)$ d'où :

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad P(X_n=3)=P(X_n=4)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

(6) $E(X_n)=P(X_n=1)+2P(X_n=2)+3P(X_n=3)+4P(X_n=4)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}-\frac{3}{4}-\frac{4}{4}\right)$

$E(X_n)=\frac{10}{4}-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

On peut vérifier : avec $n=0$ on obtient bien $E(X_0)=1$, avec $n=1$, on obtient bien $E(X_1)=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

$$\boxed{\forall n\in N \qquad E(X_n)=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

Partie 2 : Étude des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-**ligne** de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:

$$U_n=\begin{pmatrix}P(X_n=1) & P(X_n=2) & P(X_n=3) & P(X_n=4)\end{pmatrix}$$

(7) (a) On utilise les 4 égalités obtenues en I 3) a, 4) a , que l'on peut rééecrire également pour $i=3$ et $i=4$.

$$\begin{cases} P(X_{n+1}=1) &= \frac{1}{3}\left(0.P(X_n=1)+1.P(X_n=2)+1.P(X_n=3)+1.P(X_n=4)\right)\\ P(X_{n+1}=1) &= \frac{1}{3}\left(1.P(X_n=1)+0.P(X_n=2)+1.P(X_n=3)+1.P(X_n=4)\right)\\ P(X_{n+1}=1) &= \frac{1}{3}\left(1.P(X_n=1)+1.P(X_n=2)+0.P(X_n=3)+1.P(X_n=4)\right)\\ P(X_{n+1}=1) &= \frac{1}{3}\left(1.P(X_n=1)+1.P(X_n=2)+1.P(X_n=3)+0.P(X_n=4)\right)\end{cases}$$

Donc $U_nA=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}P(X_n=1) & P(X_n=2) & P(X_n=3) & P(X_n=4)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}=U_{n+1}$

On a bien : $\qquad U_{n+1}=U_n\ A$

(b) Posons $(H_n)\quad U_n=U_0\ A^n$ pour$n\in\mathbb{N}$.

- Pour $n=0$, $A^0=I_4$ et $U_0A^n=U_0$ donc (H_0) est vrai.
- Supposons (H_n) vérifié pour $n\in\mathbb{N}$.

$U_{n+1}=U_nA=(U_0\ A^n)\times A=U_0(A^n\times A)=U_0A^{n+1}$

Donc (H_{n+1}) est vrai.

Donc (H_n) est vrai pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(c) Si $M\in\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$, le produit $\begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix}\times M$ donne la première ligne de la matrice M. Donc la première ligne de la matrice A^n est $U_0\ A^n$, c'est à dire U_n.

La première ligne de A^n est U_n, c'est à dire :

$$\boxed{\begin{pmatrix}\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\end{pmatrix}}$$

(8) En multipliant à gauche une matrice M par $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, on obtient la deuxième ligne de M. Donc en choisissant comme position initiale au départ $X_0 = 2$, et en recommençant la même méthode probabiliste, on obtiendrait la deuxième ligne de A^n. Avec $X_0 = 3$, on obtiendrait la 3-ième ligne, et $X_0 = 4$, la 4-ième ligne.

Partie 3 : Une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes

$$I = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(9) $aI + bJ = \begin{pmatrix}a+b & b & b & b & \\ b & a+b & b & b & b\\ b & b & a+b & b & \\ b & b & b & a+b & \end{pmatrix}$

Donc $aI + bJ = A \iff \begin{cases} a+b & = 0 \\ b & = \dfrac{1}{3}\end{cases} \iff a = -\dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{1}{3}$

(10) (a) $J^2 = \begin{pmatrix}4 & 4 & 4 & 4\\4 & 4 & 4 & 4\\4 & 4 & 4 & 4\\4 & 4 & 4 & 4\end{pmatrix} = 4J.$

Posons $(G_k) \quad J^k = 4^{k-1}J$.

• Pour $k = 1$, (G_1) est vrai de façon évidente.

• Supposons (G_k) vrai pour $k \geq 1$, alors $J^{k+1} = J \times J^k = J \times \left(4^{k-1}J\right) = 4^{k-1}J^2 = 4^kJ$

Donc (G_{k+1}) est vrai.

Donc (G_k) est vrai pour tout $k \geq 1$.

(b) $A^n = \left(\dfrac{1}{3}(J-I)\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n (J-I)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k(-I)^{n-k}.$

$A^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \left((-1)^n I + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}4^{k-1}\right) J\right)$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}4^{k-1} = \dfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}4^k = \dfrac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}4^k - (-1)^n\right)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}4^{k-1} = \dfrac{1}{4}\left(3^n - (-1)^n\right)$

On a donc : $\quad A^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \left((-1)^n I + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \times \dfrac{1}{4}\left(3^n - (-1)^n\right)\right) J$

$$\boxed{A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) J}$$

(c) Pour $n = 0$, $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n I + \dfrac{1}{4}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right) J = I + \dfrac{1}{4}(1-1)J = I$ .... La formule est valable pour $n = 0$.