Concours Blanc n°4 - sujet type EML

Durée : 4 heures

Exercice 1

On considère les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie I : Étude de la matrice B

(1) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B.
Est-ce que B est diagonalisable ?
(2) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, telles que $B = PDP^{-1}$.
(3) Vérifier que $D^2 = 5D - 4I$ et exprimer B^2 comme combinaison linéaire de B et I.
(4) Montrer que B est inversible et exprimer B^{-1} comme combinaison linéaire de B et I.

Partie II : Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application $\quad h : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad M \longmapsto h(M) = AMB.$

(1) Vérifier que h est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(2) Montrer que h est bijectif et exprimer h^{-1} sous une forme analogue à celle donnée pour h.
(3) On se propose dans cette question de déterminer les valeurs propres de h.
   (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $N = MP$, ou P est la matrice définie dans la question **I2.**
   Montrer : $h(M) = \lambda M \iff AND = \lambda N$, où D est la matrice définie dans la question **I2.**
   (b) Déterminer les réels λ pour lesquels il existe une matrice N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A\ N\ D = \lambda N$.
   A cet effet, on pourra noter $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
   (c) En déduire les valeurs propres de h. Montrer que h est diagonalisable et, donner une matrice diagonale représentant h.
   (d) On note e l'endomorphisme identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note 0 l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Montrer: $(h - e) \circ (h + e) \circ (h - 4e) \circ (h + 4e) = 0$.

Exercice 2

On considère l'application

$$f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = (x + \ln x)\, e^{x-1}.$$

Partie I : Étude et représentation graphique de f

(1) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.
Pour tout $x \in]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$.

(2) Établir que : $\forall x \in]0,+\infty[, \quad \ln x + \frac{1}{x} > 0$.

(3) En déduire que : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0$.

(4) En déduire le sens de variation de f.

(5) Dresser le tableau de variation de f, comprenant la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.

(6) Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On précisera la tangente au point d'abscisse 1.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.

(2) Établir, par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq e^n$.

(3) Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $v_n = 1/u_n$. Montrer que la série de terme général v_n converge. On note S sa limite.

(5) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| S - \sum_{k=0}^{n} v_k \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}.$$

(6) (a) Écrire une fonction `SciLab`, d'entête `function V=Suite_V (n)`, prenant en paramètre un entier n et renvoyant la valeur de v_n.

(b) À l'aide de la Question 5, compléter la fonction `SciLab` ci-dessous pour qu'elle renvoie une valeur approchée de S à 10^{-3} près.

```
function App = Approx_S()
    n = 0
    v = Suite_V(0)
    App = v
    e = 1/(exp(1)-1)
    while e ..........
        n = n+1
        v = Suite_V(n)
        App = ..........
        e = ..........
endfunction
```

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables associée à f

On considère l'application

$$F :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

(1) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$, exprimer $F'(x)$ à l'aide de $f(x)$.

On considère l'application de classe $\mathcal{C}^2$

$$G :]0;+\infty[^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto G(x,y) = F(x) + F(y) - 2e^{\frac{x+y}{2}}.$$

(3) Pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, exprimer les dérivées partielles premières $\partial_1(G)(x,y)$ et $\partial_2(G)(x,y)$ à l'aide de $f(x)$, $f(y)$ et $e^{(x+y)/2}$.

(4) (a) Montrer que f est bijective.

(b) Établir que, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de G si et seulement si

$$x = y \quad \text{et} \quad x + \ln x = e.$$

(5) Montrer que l'équation $x + \ln x = e$ d'inconnue $x \in]0;+\infty[$ admet une unique solution, que l'on notera α, et montrer que : $1 < \alpha < e$.

(6) En déduire que G admet comme unique point critique le point (α, α) et montrer que la matrice Hessienne de G au point (α, α) s'écrit :

$$H = \nabla^2(G)(\alpha,\alpha) = \begin{pmatrix} f'(\alpha) - \dfrac{e^\alpha}{2} & -\dfrac{e^\alpha}{2} \\ -\dfrac{e^\alpha}{2} & f'(\alpha) - \dfrac{e^\alpha}{2} \end{pmatrix} = f'(\alpha)I_2 - \frac{e^\alpha}{2}M$$

où

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(7) (a) Déterminer le spectre de la matrice M puis en déduire que

$$\mathrm{Sp}(H) = \{f'(\alpha), f'(\alpha) - e^\alpha\}.$$

(b) Montrer que $f'(\alpha) > e^\alpha$.

(c) En déduire que G admet un extremum local et préciser sa nature.

Exercice 3

Les parties A et B sont indépendantes

On considère un moteur qui fonctionne sans interruption, en émettant du gaz carbonique dans l'atmosphère.

Partie A

Dans cette partie on suppose que le moteur subit chaque jour un contrôle de pollution afin de voir si le taux de gaz carbonique émis est réglementaire (Si c'est bien le cas on dira que le contrôle est positif).

On numérote ces contrôles à partir du jour numéro 1 et on les suppose indépendants.

À chacun de ces contrôles la probabilité d'être positif est $\frac{3}{5}$.

Au premier contrôle négatif, les réglages du moteur sont améliorés puis on le soumet le lendemain à une nouvelle séries de contrôles indépendants, à raison de un contrôle par jour.

À chacun de ces nouveaux contrôles la probabilité d'être positif est alors de $\frac{4}{5}$.

On note dans toute la suite X la variable aléatoire égale au numéro du jour du premier contrôle négatif et Y la variable aléatoire égale au numéro du jour du second contrôle négatif.

(1) Justifier que X suit une loi classique, qu'on détaillera, et donner son espérance et sa variance.

(2) (a) Donner $Y(\Omega)$. Que s'est-il passé les cinq premiers jours si $(X = 3)$ et $(Y = 5)$ se sont réalisés?

(b) En déduire $P((X = 3) \cap (Y = 5)) = \frac{72}{5^5}$.

(c) Plus généralement, montrer que pour $i \geq 1$ et $j \geq 2$

$$P\left((X = i) \cap (Y = j)\right) = \begin{cases} (\frac{3}{5})^{i-1} \times \frac{2}{5} \times (\frac{4}{5})^{j-i-1} \times \frac{1}{5}, & \text{si } i < j \\ 0, & \text{si } i \geq j. \end{cases}$$

(d) Montrer que pour tout entier naturel $j \geq 2$,

$$P(Y = j) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^j - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^j.$$

Partie B

Dans cette partie a désigne un réel strictement positif. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ \dfrac{3a^3}{x^4}, & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

(1) Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans la suite de cette partie, un capteur mesure **en permanence** le taux de gaz carbonique émis par le moteur. On suppose que le temps écoulé entre le démarrage du moteur et l'instant précis (en heures) où son taux de gaz carbonique devient non réglementaire est une variable aléatoire T de densité f.

(2) Montrer que T admet une espérance et une variance de valeurs:

$$E(T) = \frac{3a}{2}, \quad V(t) = \frac{3a^2}{4}.$$

(3) (a) Déterminer la fonction de répartition de T.

(b) Calculer les probabilités $P(T > 2a)$ et $P_{(T>2a)}(T > 6a)$.

(4) On met en route n moteurs de modèle identique au précédent, et indépendants. On note $T_1, T_2, ..., T_n$ les temps respectifs pendant lesquels ces moteurs ont un taux de gaz carbonique réglementaire ($T_1, T_2, ..., T_n$ suivent donc la même loi que T et sont indépendantes).

(a) Montrer que la variable

$$Z_n = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^{n} T_k$$

est un estimateur sans biais du paramètre a.

(b) Calculer son risque quadratique $r(Z_n)$. En déduire que T_n est un estimateur convergent.