ECE 2 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°4 - sujet type EML

Solution

Exercice 1

On considère les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie I : Étude de la matrice B

(1) • Déterminons le spectre de B. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(B) &\iff B - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \text{ est non inversible} \\ &\iff (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 4. \end{aligned}$$

Ainsi

$$Sp(B) = \{1; 4\}.$$

On a deux valeurs propres distinctes pour une matrice de taille 2. Il suit que B est diagonalisable.

• Déterminons les sous-espaces propres de B. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On a $E_1 = \mathrm{Ker}(B - I)$.

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(B-I) &\iff (B-I)X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = -2y \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_1 = \mathrm{Ker}(B - I) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

La famille $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ engendre E_1 et est libre (un vecteur non nul) donc c'est une base de E_1 et $\dim(E_1) = 1$.D'autre part,

$$\begin{aligned} X \in E_4 = \mathrm{Ker}(B - 4I) &\iff (B - 4I)X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} -2x + 2y &= 0 \\ x - y &= 0 \end{cases} \\ &\iff x = y \\ &\iff X = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_4 = \mathrm{Ker}(B - 4I) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

La famille $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ engendre E_4 et est libre (un vecteur non nul) donc c'est une base de E_4 et $\dim(E_4) = 1$.

(2) D'après l'étude précédente, on a :

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{et} \quad E_4 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Ainsi, la famille

$$\mathcal{B}' = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

est une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de B. Notons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage (donc inversible) de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$ et D la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a, d'après la formule de changement de base $B = PDP^{-1}$.

(3) On a :

$$5D - 4I = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = D^2$$

Ainsi, on a d'après la formule de la question précédente :

$$B^2 = \left(PDP^{-1}\right)^2 = PD^2P^{-1} = P(5D - 4I)P^{-1} = 5PDP^{-1} - 4PIP^{-1} = 5B - 4I$$

Ainsi,

$$B^2 = 5B - 4I.$$

(4) On a d'après la question précédente :

$$B^2 = 5B - 4I \iff -B^2 + 5B = 4I \iff B\left(\frac{1}{4}(-B+5I)\right) = I$$

Ainsi, B est inversible et

$$B^{-1} = \frac{1}{4}(-B+5I).$$

Partie II : Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application

$$h : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad M \longmapsto h(M) = AMB.$$

(1) Soient $(M, M') \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$hM + \lambda M') = A(M + \lambda M')B = (AM + \lambda AM')B = AMB + \lambda AM'B = h(M) + \lambda h(M')$$

donc h est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (produit de matrices) donc h est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(2) On cherche l'application réciproque en résolvant l'équation $h(M) = N$ (ce qui prouvera au passage que h est bijectif).

Soient $(M, N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$. On a, en remarquant que A et B sont inversibles

$$h(M) = N \iff AMB = N \iff MB = A^{-1}N \iff M = A^{-1}NB^{-1}$$

Ainsi h est bijectif et

$$h^{-1} : M \longmapsto h^{-1}(M) = A^{-1}MB^{-1}.$$

(3) **On se propose dans cette question de déterminer les valeurs propres de h.**

(a) On a, en remarquant que $N = MP \iff M = NP^{-1}$

$$\begin{aligned} h(M) = \lambda M &\iff AMB = \lambda M \\ &\iff ANP^{-1}B = \lambda NP^{-1} \\ &\iff ANP^{-1}BP = \lambda NP^{-1}P \\ &\iff AND = \lambda N \quad \text{car } B = PDP^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$h(M) = \lambda M \iff AND = \lambda N.$$

(b) Soit $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned}
AND = \lambda N &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} x & 4y \\ -z & -4t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \lambda x \\ 4y & = & \lambda y \\ -z & = & \lambda z \\ -4t & = & \lambda t \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} (1-\lambda)x & = & 0 \\ (4-\lambda)y & = & 0 \\ (1+\lambda)z & = & 0 \\ (4+\lambda)t & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff (1-\lambda) = 0 \text{ ou } (4-\lambda) = 0 \text{ ou } (1+\lambda) = 0 \text{ ou } (4+\lambda) = 0
\end{aligned}$$

car N est non nulle ssi $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ ou $z \neq 0$ ou $t \neq 0$.
Ainsi, il existe une matrice N non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AND = \lambda N$ si et seulement si

$$\lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 4 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1 \quad \text{ou} \quad \lambda = -4.$$

(c) D'après la question précédente, on a $h(N) = \lambda N$ avec $N \neq 0$ si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 4$ ou $\lambda = -1$ ou $\lambda = -4$. Ainsi, $Sp(h) = \{-4; -1; 1; 4\}$. Comme h est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (avec $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$) qui admet quatre valeurs propres distinctes, on peut en déduire que h est diagonalisable.

Dans une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de h (associés par exemple aux valeurs propres par ordre croissant), la matrice de h est la matrice diagonale suivante :

$$H = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(d) On vérifie matriciellement :

$$\begin{aligned}
(H-I)(H+I)(H-4I)(H+4I) &= \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$(h-e) \circ (h+e) \circ (h-4e) \circ (h+4e) = 0.$$

Exercice 2

On considère l'application

$$f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = (x + \ln x)\, e^{x-1}.$$

Partie I : Étude et représentation graphique de f

(1) La fonction logarithme, seule vraie contrainte ici, est bien (définie et) dérivable sur $]0;+\infty[$; il suit clairement que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur ce même intervalle et que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{x-1} + (x+\ln(x))\,e^{x-1} \\ &= \left(1+\frac{1}{x}+x+\ln(x)\right)e^{x-1}. \end{aligned}$$

(2) Soit $g(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$. On va montrer, en faisant l'étude de la fonction g, que, pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$. La fonction g est clairement définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et on calcule facilement

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2},$$

dont l'étude très facile du signe permet de dresser le tableau suivant:

x	0			1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$		$-$	0	$+$	
g	$\Vert$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, on constate que $g(x) \geq 1 > 0$ pour tout $x > 0$, ce qui est bien l'inégalité recherchée.

(3) La question précédente permet donc de voir que, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} = \left(\ln x + \frac{1}{x}\right) + 1 + x > 0$$

car $1 + x \geq 0$ et de conclure que, pour tout $x \in]0,+\infty[$ $\quad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0$.

(4) On a donc $f'(x) > 0$ sur $]0,+\infty[$. On en déduit immédiatement que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

(5) Déterminer les limites au bord de l'ensemble de définition de f n'est pas un problème; il n'y a pas de forme indéterminée et on peut tout simplement appliquer l'algèbre des limites:

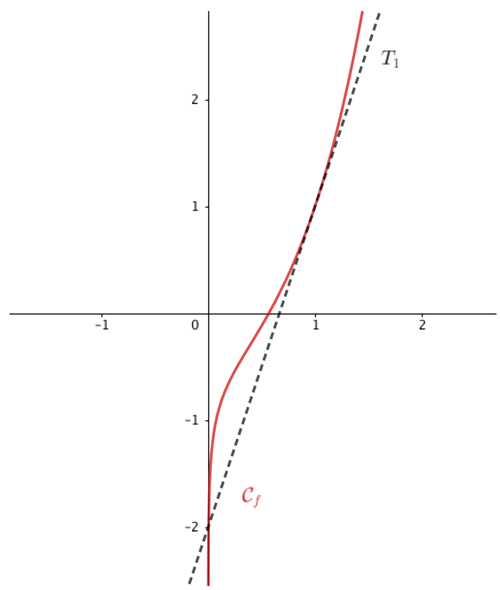
En 0 : $f(x) = (x+\ln x)\,e^{x-1} \to -\infty$
En $+\infty$: $f(x) = (x+\ln x)\,e^{x-1} \to +\infty$

De plus, un calcul direct nous donne $f(1) = 1$ et $f'(1) = 3$. Il suit notamment que la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 aura pour équation $T_1 : y = 3x - 2$.

On dresse alors, comme demandé, le tableau de variations de f:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

(6) L'étude précédente nous permet de tracer l'allure de la courbe (ainsi que la tangente au point d'abscisse 1.



Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) Supposons donc qu'il existe un certain entier $n \geq 0$ pour lequel u_n existe et a le bon goût d'être supérieur ou égal à 2. On peut alors calculer $f(u_n)$ car $u_n \geq 2 > 0$ est donc bien dans l'ensemble de définition de f. En particulier, u_{n+1} existe.

En reprenant l'étude de la fonction f, on se souvient que f est strictement croissante, et on observe en plus que

$$f(2) = (2 + \ln(2))e^1 > 2,$$

car $e \simeq 2,71 > 1$ et $\ln(2) > 0$.

Par croissance de f, on en conclut que

$$u_{n+1} = f(u_n) \geq f(2) > 2,$$

et la majoration s'étend donc à u_{n+1}. Comme $u_0 = 2$ existe et $u_0 \geq 2$, le principe de récurrence nous permet d'affirmer que la suite (u_n) est bien définie (chaque terme existe) et que, pour tout $n \geq 0$, on a bien $u_n \geq 2$.

(2) On procède encore par récurrence pour montrer l'inégalité. Pour $n = 0$: $u_0 = 2$ et $e^0 = 1$ donc $u_0 \geq e^0$ et l'initialisation est bien vérifiée.

Soit alors $n \geq 0$ tel que $u_n \geq e^n$. On veut montrer que $u_{n+1} \geq e^{n+1}$.

$$u_{n+1} = f(u_n) \geq f(e^n).$$

On va alors utiliser la question précédente. Comme $u_n \geq 2$ et que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est croissante, on sait en particulier que $\ln(u_n) \geq \ln(2) > 0$. Avec la même idée, on a $e^{u_n-1} \geq e^{2_1} = e$. En combinant ces deux observations, on arrive à

$$u_{n+1} = (u_n + \ln(u_n))\, e^{u_n-1} \geq u_n \times e \geq e^n \times e \geq e^{n+1},$$

où l'avant dernière inégalité est obtenue grâce à l'hypothèse de récurrence. Au final, on a bien l'inégalité au rang $n+1$, ce qui prouve le caractère héréditaire de la propriété et termine la démonstration par récurrence.

(3) Si la suite (u_n) était majorée, on aurait l'existence d'une valeur $M \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq M$. On combinant ceci avec l'inégalité précédente, on obtient:

$$\forall n \geq 0, \qquad e^n \leq u_n \leq M.$$

Or, on sait bien que l'exponentielle tend vers $+\infty$ quand son argument fait de même et ne peux donc en aucun cas être majorée. Ainsi, il en est de même pour (u_n).

(4) D'après une question ci-dessus, il est clair que

$$0 \leq \frac{1}{u_n} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

Par comparaison à la série géométrique de raison $1/e$ - donc convergente - on peut assurer que notre série (à termes positifs) est convergente. On note S sa limite. De plus, on estime facilement le reste

$$\begin{aligned}
\left|S - \sum_{k=0}^{n} v_k\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right| \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k \\
&= \frac{1}{1-(1/e)} - \frac{1-(1/e)^{n+1}}{1-(1/e)} \\
&= \frac{1}{e^n(e-1)}.
\end{aligned}$$

(5) (a) On écrit la fonction demandée sans trop de difficulté

```
function V=Suite_V(n)
    u=2;
    for k=1:n
        u=(u+log(u))*exp(u-1);
     end
     V=1/u;
endfunction
```

(b) Il suffit de calculer la somme partielle jusqu'à un indice n tel que le majorant obtenu à la Question 4 soit inférieur à la précision voulue.

```
function App = Approx_S()
    n = 0
    v = Suite_V(0)
    App = v
```

```
        e = 1/(exp(1)-1)
        while e >= 10^(-3)
            n = n+1
            v = Suite_V(n)
            App = App + v
            e = e/exp(1)
endfunction
```

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables associée à f

On considère l'application

$$F :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$$

(1) Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que F est la primitive de f qui s'annule en 1. Ainsi, F est dérivable et on a pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$F'(x) = f(x).$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$.

On considère l'application de classe $\mathcal{C}^2$

$$G :]0;+\infty[^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto G(x,y) = F(x) + F(y) - 2e^{\frac{x+y}{2}}.$$

(2) La fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[^2$ et on a

$$\begin{aligned}
\partial_1(G)(x,y) &= F'(x) + 0 - 2\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}} = f(x) - e^{\frac{x+y}{2}} \\
&= f(x) - e^{\frac{x+y}{2}}.
\end{aligned}$$

$$\partial_2(G)(x,y) = f(y) - e^{\frac{x+y}{2}}$$

(3) (a) On a vu dans la Partie I que la fonction f était continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, par le théorème de bijection, f est bien bijective sur son ensemble de définition.

(b) On résout. (x,y) est un point critique de G si et seulement si $\nabla G(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\nabla G(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \partial_1 G(x,y) = 0 \\ \partial_2 G(x,y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} f(x) - e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \\ f(y) - e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} f(x) - e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \\ f(y) - f(x) = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} f(x) - e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \\ f(y) = f(x) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} f(x) - e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \\ x = y \end{cases} \quad \text{car } f \text{ est bijective} \\
&\iff \begin{cases} (x + \ln(x))e^{x-1} = e^x \\ x = y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + \ln(x) = e \\ x = y \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$(x,y) \text{ est un point critique de } G \iff x=y \quad \text{et} \quad x+\ln x = e.$$

(4) Posons $h :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto h(x) = x+\ln(x)$. Cette fonction est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a

$$h'(x) = 1+\frac{1}{x} > 0.$$

Ainsi, h est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$ (car $\lim_{x\to 0} x+\ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x+\ln(x) = +\infty$).
Comme $0 \in]-\infty;+\infty[$, on en déduit que l'équation $x+\ln x = e$ admet une unique solution $\alpha \in]0;+\infty[$.
De plus, on a $h(1) = 1 < e$ et $h(e) = e+1 > e$ donc on a bien $1 < \alpha < e$.

(5) On a vu que (x,y) est un point critique de G si et seulement si $x+\ln(x) = e$et $x = y$. Or, d'après la question précédente, $x+\ln(x) = e$ si et seulement si $x = \alpha$. Ainsi, G admet comme unique point critique le point (α,α). D'autre part, on a

$$\partial^2_{1,1}(G)(x,y) = f'(x) - \frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}}, \qquad \partial^2_{1,2}(G)(x,y) = \partial^2_{2,1} = -\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}}, \quad \partial^2_{2,2}(G)(x,y) = f'(y) - \frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}},$$

ce qui donne comme matrice Hessienne au point (x,y)

$$\nabla^2(G)(x,y) = \begin{pmatrix} f'(x) - \frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}} - \frac{e^\alpha}{2} & -\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}} \\ -\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}} & f'(y) - \frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}} \end{pmatrix}.$$

soit au point critique (α,α)

$$H = \nabla^2(G)(\alpha,\alpha) = \begin{pmatrix} f'(\alpha) - \frac{e^\alpha}{2} & -\frac{e^\alpha}{2} \\ -\frac{e^\alpha}{2} & f'(\alpha) - \frac{e^\alpha}{2} \end{pmatrix} = f'(\alpha)I_2 - \frac{e^\alpha}{2}M.$$

(6) (a) On obtient facilement que $S(M) = \{0;2\}$ (par exemple en cherchant les valeurs qui annulent le déterminant de $M - \lambda I_2$). Ainsi, M est une matrice carrée d'ordre 2 qui admet deux valeurs propres distinctes donc M est diagonalisable. Ainsi, il existe une matrice P inversible et une matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ telles que $M = PDP^1$. On a alors

$$H = f'(\alpha)I_2 - \frac{e^\alpha}{2}M = P\left(f'(\alpha)I_2 - \frac{e^\alpha}{2}D\right)P^{-1} = P\begin{pmatrix} f'(\alpha) & 0 \\ 0 & f'(\alpha) - e^\alpha \end{pmatrix}P^{-1}.$$

On en déduit que

$$Sp(H) = \{f'(\alpha), f'(\alpha) - e^\alpha\}.$$

(b) On a

$$\begin{aligned} f'(\alpha) > e^\alpha &\iff \frac{f'(\alpha)}{e^\alpha} > 1 \\ &\iff \frac{\left(\alpha + \ln(\alpha) + 1 + \frac{1}{\alpha}\right)e^{\alpha-1}}{e^\alpha} > 1 \\ &\iff \left(\alpha + \ln(\alpha) + 1 + \frac{1}{\alpha}\right)e^{-1} > 1 \\ &\iff \alpha + \ln(\alpha) + 1 + \frac{1}{\alpha} > e \end{aligned}$$

Or, α est solution de l'équation $x+\ln(x)=e$ donc on a $\alpha+\ln(\alpha)=e$. Ainsi, on a bien

$$\alpha+\ln(\alpha)+1+\frac{1}{\alpha}=e+1+\frac{1}{\alpha}>e \quad \text{car } \alpha>0$$

et donc

$$f'(\alpha)>e^{\alpha}.$$

(c) Comme $f'(\alpha)>e^{\alpha}$ donc $f'(\alpha)>0$ et comme de plus $f'(\alpha)>e^{\alpha}$ alors $f'(\alpha)-e^{\alpha}>0$. Ainsi, $H=\nabla^2(G)(\alpha,\alpha)$ admet deux valeurs propres strictement positives donc G un minimum local en (α,α).

Exercice 3

Les parties A et B sont indépendantes

On considère un moteur qui fonctionne sans interruption, en émettant du gaz carbonique dans l'atmosphère.

Partie A

Dans cette partie on suppose que le moteur subit chaque jour un contrôle de pollution afin de voir si le taux de gaz carbonique émis est réglementaire (Si c'est bien le cas on dira que le contrôle est positif).

On numérote ces contrôles à partir du jour numéro 1 et on les suppose indépendants.

À chacun de ces contrôles la probabilité d'être positif est $\frac{3}{5}$.

Au premier contrôle négatif, les réglages du moteur sont améliorés puis on le soumet le lendemain à une nouvelle séries de contrôles indépendants, à raison de un contrôle par jour.

À chacun de ces nouveaux contrôles la probabilité d'être positif est alors de $\frac{4}{5}$.

On note dans toute la suite X la variable aléatoire égale au numéro du jour du premier contrôle négatif et Y la variable aléatoire égale au numéro du jour du second contrôle négatif.

(1) X représente ici le temps d'attente du premier contrôle négatif, qui se produit chaque jour avec probabilité $2/5$ donc X suit une loi géométrique

$$X\hookrightarrow\mathcal{G}\left(\frac{2}{5}\right), \qquad E(X)=\frac{5}{2}, \qquad V(X)=\frac{15}{4}.$$

(2) (a) Le second contrôle négatif ne peux pas arriver avant le deuxième jour mais peut arriver n'importe quand après. On a $Y(\Omega)=\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$. L'évènement $(X=3)\cap(Y=5)$ correspond à deux tests positifs les deux premiers jours, un premier test négatif le troisième jour, un text positif le quatrième jour puis un second contrôle négatif le cinquième jour.

(b) Notant C_k l'évènement "le contrôle est positif le $k-$ème jour, la formule des probabilités composées donne

$$\begin{aligned}
P\left((X=3)\cap(Y=5)\right) &= P(C_1\cap C_2\cap\overline{C}_3\cap C_4\cap\overline{C}_5)\\
&= P(C_1)P_{C_1}(C_2)P_{C_1\cap C_2}(\overline{C}_3)P_{C_1\cap C_2\cap\overline{C}_3}(C_4)P_{C_1\cap C_2\cap\overline{C}_3\cap C_4}(\overline{C}_5)\\
&= \frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\\
&= \frac{72}{5^5},
\end{aligned}$$

ce qui était attendu.

(c) Plus généralement, si $i \geq 1$ et $j \geq 2$, il est clair que $j \leq i$ donne une probabilité nulle (le second contrôle négatif ne peut pas avoir lieu avant le premier). Pour $i \leq j+1$, on a $(i-1)$ premiers contrôles positifs (avec probabilité $3/5$, puis un contrôle négatif (avec probabilité $2/5$). Il suit qu'on fait le réglage. Les $(j-1-i)$ contrôles positifs suivant se produisent avec probabilité $4/5$. Enfin, le $j-$ème contrôle est négatif, ce qui se produit avec probabilité $1/5$. On a bien

$$P\left((X=i)\cap(Y=j)\right) = \begin{cases} (\frac{3}{5})^{i-1} \times \frac{2}{5} \times (\frac{4}{5})^{j-i-1} \times \frac{1}{5}, & \text{si } i<j \\ 0, & \text{si } i \geq j. \end{cases}$$

(d) Pour obtenir la loi (marginale) de Y, on utilise la formule des probabilités totales applique au s.c.e $\{(X=i),\ i \in \mathbb{N}^*\}$. La question précédente donne alors

$$\begin{aligned} P(Y=j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P\left((Y=j)\cap(X=i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{i-1} \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{j-i-1} \times \frac{1}{5}\right] \\ &= \frac{2}{5^2}\left(\frac{4}{5}\right)^{j-2} \times \sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{3}{5}\times\frac{5}{4}\right)^{i-1} \\ &= \frac{2}{5^2}\left(\frac{4}{5}\right)^{j-2} \times \left(\frac{1-(\frac{3}{4})^{j-1}}{1-\frac{3}{4}}\right) \\ &= \frac{2\times 4}{5^2}\left(\frac{4}{5}\right)^{j-2} - \frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\right)^{j-1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{j} - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{j}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

Partie B

Dans cette partie a désigne un réel strictement positif. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x<a \\ \dfrac{3a^3}{x^4}, & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

(1) Comme $a>0$, la fonction f est bien positive sur tout $\mathbb{R}$. Elle ne présente qu'un seul point de discontinuité (en $x=a$). Soit $A>a$. On a

$$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x = \int_a^A \frac{3a^3}{x^4}\mathrm{d}x = \left[-\frac{a^3}{x^3}\right]_a^A = 1-\left(\frac{a}{A}\right)^3 \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi - la fonction f étant nulle sur $]-\infty;a[$, l'intégrale de f est convergente sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Il suit que f est bien une densité de probabilité.

Dans la suite de cette partie, un capteur mesure **en permanence** le taux de gaz carbonique émis par le moteur. On suppose que le temps écoulé entre le démarrage du moteur et l'instant précis (en heures) où son taux de gaz carbonique devient non réglementaire est une variable aléatoire T de densité f.

(2) Il faut montrer que X admet des moments d'ordres 1 et 2. Mais on reconnait des intégrales de Riemann convergentes et on a

$$E(X) = \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{x^3} = \lim_{A+\infty} \left[-\frac{3a^3}{2x^2} \right]_a^A = \frac{3a^3}{2a^2} = \frac{3a}{2}.$$

De même,

$$E(X^2) = \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{x^2} = \lim_{A+\infty} \left[-\frac{3a^3}{x} \right]_a^A = \frac{3a^3}{a} = 3a^2$$

et il suit que

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3a^2 - \frac{9a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

(3) (a) On a sans difficulté a fonction de répartition de T en reprenant le calcul de l'intégrale de f, c'est à dire

$$F_T(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^3, & \text{si } x \leq a \end{cases}$$

(b) On utilise l'expression de la fonction de répartition précédente (en remarquant que $2a > a$)

$$P(T > 2a) = 1 - P(T \leq 2a) = 1 - F_T(2a) = \frac{1}{8}.$$

Par ailleurs,

$$P_{(T>2a)}(T > 6a) = \frac{P((T > 2a) \cap (T > 6a))}{P(T > 2a)} = \frac{P(T > 6a)}{P(T > 2a)} = \frac{(1/6)^3}{(1/2)^3} = \frac{1}{3^3}.$$

(4) On met en route n moteurs de modèle identique au précédent, et indépendants. On note $T_1, T_2, ..., T_n$ les temps respectifs pendant lesquels ces moteurs ont un taux de gaz carbonique réglementaire ($T_1, T_2, ..., T_n$ suivent donc la même loi que T et sont indépendantes).

(a) Par linéarité de l'espérance, et comme $E(T_k) = E(T) = 3a/2$, on a

$$E(Z_n) = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^{n} E(T_k) = \frac{2E(T)}{3} = a.$$

Ainsi, Z_n est un estimateur non biaisé de a.

(b) L'estimateur étant non biaisé, son risque quadratique est égal à sa variance. De plus, comme $V(T_k) = V(T) = 3a^2/4$,

$$\begin{aligned} r(Z_n) &= V(Z_n) = \frac{4}{9n^2} V\left(\sum_{k=1}^{n} T_k\right) \\ &= \frac{4 \times 3a^2}{4 \times 9n} \qquad \text{(par indépendance des } T_k\text{)} \\ &= \frac{a^2}{3n}. \end{aligned}$$

Le risque quadratique tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Un résultat du cours nous permet d'affirmer que T_n est alors un estimateur convergent.