ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°1

À rendre le 19 Septembre

Exercice 1. Simplifier au maximum

$$A = \left|\ln(9) - 3\ln(|-6|) + 2\ln\left(\sqrt{(-2)^4}\right)\right|, \qquad B_n = -8\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

Exercice 2. (Équations)

(1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E_1) \qquad 16^x - 2^{2x+1} = 3.$$

(2) (a) Montrer que l'expression $1 - \sqrt{x^2+1}$ ne s'annule qu'en $x = 0$ et qu'elle est, ailleurs, de signe constant strictement négatif.

(b) En déduire les solutions de l'équation

$$(E_2) \qquad \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = x.$$

Exercice 3. Dessiner (sommairement mais proprement et lisiblement) une fonction f (définie sur $\mathbb{R}$) vérifiant la propriété suivante

$$f(0) = 1, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(0)| \leq 2 \qquad \text{et} \qquad \exists x > 0, \ f(x) < -\frac{1}{2}.$$

Exercice 4. Montrer que, $\forall x \in [0; 1/2]$, $-x - x^2 \leq \ln(1-x)$.

Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}.$$

(1) Montrer que f est paire.
(2) Déterminer les limites aux bords de l'ensemble de définition. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
(3) Justifier que f est dérivable, calculer l'expression de sa dérivée puis dresser son tableau de variations, on précisera les éventuels *extrema*.
(4) Représenter dans un repère orthonormé la courbe de f.
(5) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f'(x)| \leq f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

Exercice 6. Déterminer la nature de la branche en $+\infty$ de la fonction

$$f : \ x \longmapsto \sqrt{x^2 - 3x + 4} - 3x.$$