ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison n°10

À rendre au plus tard le 11 Avril

Exercice 1. Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$P(X = 0) = 0.1, \quad P(X = 1) = 0.3, \quad P(X = 2) = 0.4, \quad P(X = 3) = 0.2.$$

(1) On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Z et préciser son espérance.
(2) On note Y la variable aléatoire : " nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi de Y. (On pourra considérer dans la suite que Z et X sont indépendantes.)
(3) Calculer la marge brute moyenne par jour.

Exercice 2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont l'action sur la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est

$$f(e_1) = 2e_4, \quad f(e_2) = e_3, \quad f(e_3) = e_2, \quad f(e_4) = 2e_1.$$

(1) Écrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
(2) Sans calcul, que peut-on dire de l'image et du noyau de f? La matrice est-elle inversible?
(3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le but de la question est de déterminer, selon les valeurs de λ, le noyau

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}).$$

   (a) Écrire la matrice $A - \lambda I_4$.
   (b) Soit $u \in \mathbb{R}^4$. Écrire le système vérifié par les composantes de u correspondant à $(A - \lambda I_4)u = 0$.
   (c) Résoudre ce système à paramètre en discutant selon les valeurs de λ.
   (d) Préciser pour quelles valeurs de λ le noyau E_λ n'est pas réduit au vecteur nul et vérifier qu'il existe quatre valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ pour lesquelles c'est le cas. Vérifier que $\dim(E_{\lambda_i} = 1$ dans chacun des cas et proposer une base $\{u_i\}$ pour chaque noyau.

(4) Montrer que $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$. Quelle est, sans aucun calcul supplémentaire, la matrice D de f dans la base $\mathcal{F}$.
(5) On note P la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs de la base $\mathcal{F}$. Justifier sans calcul que P est inversible. Déterminer, par un pivot de Gauss, l'inverse de P.
(6) Vérifier que $A = PDP^{-1}$.

(7) (*Question facultative*) On cherche maintenant à déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec A, c'est à dire

$$C_A = \{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) : \ MA = AM\}\,.$$

(a) On pose $N = P^{-1}MP$. Montrer que $M \in C_A \iff N \in C_D$. (C'est à dire que M commute avec A si et seulement si N commute avec D.

(b) Montrer, en résolvant le système correspondant, que l'ensemble des matrices N qui commutent avec D est l'ensemble des matrices diagonales.

(c) En déduire que

$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 3. (Olive et Tom)

Olive et Tom s'affrontent aux tirs au but et se lancent dans une succession de tirs, chacun leur tour - en commençant par Olive - jusqu'à ce que l'un des deux ait deux buts d'avance sur son adversaire. Tom est un peu meilleur qu'Olive; il marque trois fois sur cinq alors que son ami ne marque qu'une fois sur trois.

Remarque. L'énoncé tel quel n'est pas très clair. On ne sait pas si chacun tire un même nombre de fois (et on veut avoir deux buts d'écart à l'issue d'un certain nombre de manches) ou s'il s'agit d'un duel en "mort subite". On acceptera donc les deux versions du programme et on demande alors de préciser quel format de confrontation on a choisi.

(1) Écrire un programme sous `SciLab` simulant la confrontation et faisant apparaître le nom du vainqueur.

(2) Calculer la probabilité de victoire de chaque adversaire de façon théorique est ici compliqué. On propose de donner une approximation de ces probabilités par `SciLab`. Modifier la fonction précédente pour qu'elle renvoit 1 si Olive gagne et 0 sinon. Estimer la fréquence de victoire d'Olive sur 1000 confrontations.