ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison n°10

À rendre au plus tard le 11 Avril

Exercice 1. Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$P(X = 0) = 0.1, \quad P(X = 1) = 0.3, \quad P(X = 2) = 0.4, \quad P(X = 3) = 0.2.$$

(1) On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Z et préciser son espérance.
(2) On note Y la variable aléatoire : " nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi de Y. (On pourra considérer dans la suite que Z et X sont indépendantes.)
(3) Calculer la marge brute moyenne par jour.

Exercice 2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont l'action sur la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est

$$f(e_1) = 2e_4, \quad f(e_2) = e_3, \quad f(e_3) = e_2, \quad f(e_4) = 2e_1.$$

(1) Écrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
(2) Sans calcul, que peut-on dire de l'image et du noyau de f? La matrice est-elle inversible?
(3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le but de la question est de déterminer, selon les valeurs de λ, le noyau

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}).$$

  (a) Écrire la matrice $A - \lambda I_4$.
  (b) Soit $u \in \mathbb{R}^4$. Écrire le système vérifié par les composantes de u correspondant à $(A - \lambda I_4)u = 0$.
  (c) Résoudre ce système à paramètre en discutant selon les valeurs de λ.
  (d) Préciser pour quelles valeurs de λ le noyau E_λ n'est pas réduit au vecteur nul et vérifier qu'il existe quatre valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ pour lesquelles c'est le cas. Vérifier que $\dim(E_{\lambda_i} = 1$ dans chacun des cas et proposer une base $\{u_i\}$ pour chaque noyau.

(4) Montrer que $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$. Quelle est, sans aucun calcul supplémentaire, la matrice D de f dans la base $\mathcal{F}$.
(5) On note P la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs de la base $\mathcal{F}$. Justifier sans calcul que P est inversible. Déterminer, par un pivot de Gauss, l'inverse de P.
(6) Vérifier que $A = PDP^{-1}$.

(7) (*Question facultative*) On cherche maintenant à déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec A, c'est à dire

$$C_A = \{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) : \ MA = AM\}.$$

(a) On pose $N = P^{-1}MP$. Montrer que $M \in C_A \Longleftrightarrow N \in C_D$. (C'est à dire que M commute avec A si et seulement si N commute avec D.

(b) Montrer, en résolvant le système correspondant, que l'ensemble des matrices N qui commutent avec D est l'ensemble des matrices diagonales.

(c) En déduire que

$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 3. (Olive et Tom)

Olive et Tom s'affrontent aux tirs au but et se lancent dans une succession de tirs, chacun leur tour - en commençant par Olive - jusqu'à ce que l'un des deux marque ait deux buts d'avance sur son adversaire. Tom est un peu meilleur qu'Olive; il marque trois fois sur cinq alors que son ami ne marque qu'une fois sur trois.

(1) Écrire un programme sous `SciLab` simulant la confrontation et faisant apparaître le nom du vainqueur.

(2) Déterminer la probabilité de victoire de chaque adversaire.