Devoir Maison n°10

Solution

Exercice 1. Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$P(X = 0) = 0.1, \quad P(X = 1) = 0.3, \quad P(X = 2) = 0.4, \quad P(X = 3) = 0.2.$$

(1) On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. D'après l'énoncé, il est clair que Z suit une loi binomiale, $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(2, 4/5)$. Le cours nous permet alors d'affirmer sans calcul que $E(Z) = 2 \times 4/5 = 8/5$.

(2) Un client est satisfait si celui-ci peut louer une voiture. On a alors que ce nombre est compris entre 0 et 2, ou encore $Y(\Omega) = [\![0; 2]\!]$. Aucun client n'est satisfait si personne ne vient ou des gens viennent mais ne peuvent pas louer de voiture. Par indépendance de X et Z, la seconde probabilité se calcule comme produit:

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P(X = 0) + P(X \geq 1 \cap Z = 0) \\ &= P(X = 0) + P(X \geq 1)P(Z = 0) = 0.1 + 0.9 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \\ &= \frac{34}{250} = \frac{17}{125}. \end{aligned}$$

Un client est satisfait si une seule personne vient au garage et qu'au moins une voiture est disponible, ou si plus de deux personnes viennent mais qu'une seule voiture est disponible

$$P(Y = 1) = P(X = 1 \cap Z \geq 1) + P(X \geq 2 \cap Z = 1) = 0.3 \times \frac{24}{25} + 0.6 \times \frac{8}{25} = \frac{120}{250} = \frac{60}{125}.$$

On le dernier cas, on peut procéder par soustraction (on devrait obtenir $P(Y = 2) = 48/125$) mais autant le vérifier par le raisonnement ce qui confirme notre bonne démarche

$$P(Y = 2) = P(X \geq 2 \cap Z = 2) = 0.6 \times \frac{16}{25} = \frac{96}{250} = \frac{48}{125}.$$

(3) Notons G la marge brute par jour. On cherche à calculer $E(G)$. Comme, il est clair que $G = 300Y$, on a, par les propriétés de l'espérance,

$$E(G) = 300E(Y) = 300\left(1 \times \frac{60}{125} + 2 \times \frac{48}{125}\right) = \frac{300 \times 156}{125} = \frac{1872}{5} = 374,4.$$

(On a obtenu le résultat sous forme décimale avec `SciLab`.)

Exercice 2. (Adapté à partir de **EML 2013**) On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont l'action sur la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est

$$f(e_1) = 2e_4, \quad f(e_2) = e_3, \quad f(e_3) = e_2, \quad f(e_4) = 2e_1.$$

(1) Au vu de la manière dont l'endomorphisme est défini, il est facile d'écrire que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) On voit que les quatre colonnes de A forment une famille libre. Ainsi $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^4$ et f est surjective et, par le théorème du rang, également injective et bijective. Ainsi, A est inversible.

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le but de la question est de déterminer, selon les valeurs de λ, le noyau

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}).$$

(a) On soustrait λ aux éléments diagonaux

$$A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

(b) Soit $u \in \mathbb{R}^4$.

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_4) \iff (A - \lambda I_4)u = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -\lambda x + 2t & = & 0 \\ -\lambda y + z & = & 0 \\ y - \lambda z & = & 0 \\ 2x - \lambda t & = & 0 \end{array} \right.$$

(c) Il s'agit ici de résoudre un système à paramètre. On se rappelle alors qu'il faut faire un pivot de Gauss en discutant dès que le coefficient servant de pivot dépend du paramètre et peut donc s'annuler. Afin de retarder la discussion, il est judicieux de permuter l'ordre des lignes.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\lambda x + 2t & = & 0 \\ -\lambda y + z & = & 0 \\ y - \lambda z & = & 0 \\ 2x - \lambda t & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - \lambda t & = & 0 \\ y - \lambda z & = & 0 \\ -\lambda y + z & = & 0 \\ -\lambda x + 2t & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - \lambda t & = & 0 \\ y - \lambda z & = & 0 \\ -\lambda y + z & = & 0 \\ (4 - \lambda^2)t & = & 0 \end{array} \right. \qquad (L_4) \leftarrow 2(L_4) + \lambda(L_1)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - \lambda t & = & 0 \\ y - \lambda z & = & 0 \\ (1 - \lambda^2)z & = & 0 \\ (4 - \lambda^2)t & = & 0 \end{array} \right. \qquad (L_3) \leftarrow (L_3) + \lambda(L_1)$$

Ce système est triangulaire; il est facile à résoudre. En effet, si aucun des deux derniers coefficients diagonaux $(1 - \lambda^2)$ et $(4 - \lambda^2)$ n'est nul, alors la seule solution du système est $x = y = z = t = 0$. Sinon, il y a une infinité de solutions, que l'on précise ci-après.

(d) D'après la question précédente, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1,\ -1,\ 2,\ -2\}, \qquad E_\lambda = \{0_{\mathbb{R}^4}\}.$$

Pour les quatre autres valeurs de λ, on résout un par un, un système *easy*.

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_1 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - t & = & 0 \\ y - z & = & 0 \\ 3t & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x = t & = & 0 \\ y & = & z \end{array} \right.$$

$$\iff u = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$E_1 = \text{Vect}\{u_1\}, \quad \text{où} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par la même méthode, on trouve

$$E_{-1} = \text{Vect}\{u_2\}, \quad E_2 = \text{Vect}\{u_3\}, \quad E_{-2} = \text{Vect}\{u_4\},$$

où

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(4) On a quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Pour montrer qu'ils en forment une base, il suffit de montrer qu'ils forment une famille libre. On montre donc que la seule solution de l'équation

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0$$

est $a = b = c = d = 0$. En effet,

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = \iff \left\{ \begin{array}{rcl} c + d & = & 0 \\ a + b & = & 0 \\ a - b & = & 0 \\ c - d & = & 0 \end{array} \right. \iff a = b = c = d = 0.$$

Par définition des vecteurs u_i, on a

$$u_1 \in E_1 \iff f(u_1) = u_1$$

et de même

$$f(u_2) = -u_2, \quad f(u_3) = 2u_3, \quad f(u_4) = -2u_4.$$

Il suit que

$$D = \text{Mat}(f, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(5) On note P la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs de la base $\mathcal{F}$, c'est à dire

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme l'image de l'endomorphisme dont P est la matrice dans la base canonique est engendrée par les colonne de P et que ces colonnes forment une base de $\mathbb{R}^4$, cette image est égale à $\mathbb{R}^4$ et par conséquent l'endomorphisme susmentionné est bijectif et sa matrice, P, inversible. On trouve P^{-1}

par un pivot de Gauss simultané, dont on omet les étapes ici mais qu'il est indispensable de savoir faire et de faire apparaître sur sa petite copie. On trouve

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(6) C'est un calcul dont on laisse le plaisir au lecteur.

(7) (*Question facultative*) On cherche maintenant à déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec A, c'est à dire

$$C_A = \{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) : \ MA = AM\}.$$

(a) On pose $N = P^{-1}MP$, ce qui équivaut à $M = PNP^{-1}$. Comme on a montré que $PDP^{-1} = A$, ce qui équivaut à $P^{-1}AP = D$, on a

$$\begin{aligned} M \in C_A &\iff MA = AM \\ &\iff PNP^{-1}A = APNP^{-1} \\ &\iff NP^{-1}AP = P^{-1}APN \\ &\iff ND = DN \\ &\iff N \in C_D. \end{aligned}$$

(b) On résout

$$\begin{aligned} N = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{pmatrix} \in C_D &\iff \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a & -b & 2c & -2d \\ e & -f & 2g & -2h \\ i & -j & 2k & -2l \\ m & -n & 2p & -2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -e & -f & -g & -h \\ 2i & 2j & 2k & 2l \\ -2m & -2n & -2p & -2q \end{pmatrix} \\ &\iff b = c = d = e = g = h = i = j = l = m = n = p = 0 \\ &\iff N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \\ &\iff N \text{ est diagonale.} \end{aligned}$$

(c) Il suffit de multiplier N à droite par P^{-1} et à gauche par P, on obtient

$$M = PNP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} k+q & 0 & 0 & k-q \\ 0 & a+f & a-f & 0 \\ 0 & a-f & a+f & 0 \\ k-q & 0 & 0 & k+q \end{pmatrix},$$

et on voit que M est bien de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Réciproquement, si
$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$
alors un calcul simple permet de vérifier que $AM = MA$ et on a bien la description de C_A voulue.

Exercice 3. (Olive et Tom)
Olive et Tom s'affrontent aux tirs au but et se lancent dans une succession de tirs, chacun leur tour - en commençant par Olive - jusqu'à ce que l'un des deux ait deux buts d'avance sur son adversaire. Tom est un peu meilleur qu'Olive; il marque trois fois sur cinq alors que son ami ne marque qu'une fois sur trois.

Remarque. L'énoncé tel quel n'est pas très clair. On ne sait pas si chacun tire un même nombre de fois (et on veut avoir deux buts d'écart à l'issue d'un certain nombre de manches) ou s'il s'agit d'un duel en "mort subite". On acceptera donc les deux versions du programme et on demande alors de préciser quel format de confrontation on a choisi.

On propose donc un programme pour chaque format de confrontation. À noter que, si on opte pour une confrontation en nombre égal de tirs pour chacun, on choisit de faire évoluer la différence de score. Si un seul des deux marque, celle différence augmente de 1 ou diminue de 1 (selon qui marque), si les deux marquent ou qu'aucun ne marque, cette différence ne bouge pas. On vérifiera que les probabilités du programme sont alors les bonnes.

```
//format même nombre de tirs

function []=Olive_Tom()
    D=0; // D différence de buts
    while abs(D)<>2
        r=rand();
        if r<= 2/15 then
            D=D+1;
        else
            if r<=8/15 then
                D=D-1;
            end
        end
    end
    if D==2 then
        disp('Olive')
    else
        disp('Tom')
    end
endfunction
```

```
//format mort subite

function []=Olive_Tom2()
    O=0; // score d'Olive
    T=0; //score de Tom
    while abs(O-T)<>2
        if rand()<= 1/3 then //si Olive marque
            O=O+1; //son score augmente de 1
        end
        if O-T<>2 & rand() <=3/5 then //si Olive n'a pas déjà gagné et si Tom marque
                T=T+1; //son score augmente de 1
        end
    end
    if O-T==2 then
        disp('Olive')
    else
        disp('Tom')
    end
endfunction
```

Si on veut modifier ces fonctions comme demandé, il suffit d'insérer un argument de sortie `y=` à la place de `[]=` dans l'en-tête de la fonction et de remplacer les `disp()` par `y=1` ou `y=0`. Pour estimer la probabilité de victoire d'Olive, on utilise sa fréquence de victoire sur 1000 confrontations

```
f1=0;
f2=0;
for k=1:1000
    f1=f1+Olive_Tom();
    f2=f2+Olive_Tom2();
end
disp(f1/1000) // fréquence observée format 1
disp(f2/1000) // fréquence observée format 2
```

Pour le Format 1, `SciLab` renvoie environ 9%, alors que pour le Format 2 (nettement plus avantageux que l'autre pour celui qui commence), `SciLab` renvoie environ 16%.