ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°11

À rendre au plus tard le 4 Mai

Exercice 1. (*) Un insecte pond des oeufs. Le nombre d'oeufs pondus est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Chaque oeuf a une probabilité p d'éclore, indépendante des autres oeufs. Soit Z le nombre d'oeufs qui ont éclos.

(1) Pour $k, n \in \mathbb{N}^2$, calculer $P_{X=n}(Z = k)$.
(2) En déduire la loi de Z.
(3) La variable aléatoire Z admet-elle une espérance? Si oui, la calculer.

Exercice 2. (**) Soient X et Y deux v.a. indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre p.

(1) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X \geq k)$.
(2) On s'intéresse à la variable aléatoire $W = \min(X, Y)$.
   (a) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(W \geq k)$.
   (b) En déduire que W suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Exercice 3. (**) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $E(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

(1) Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2. En déduire $E(Z_1)$ et $E(Z_2)$.

(2) Soit k un entier supérieur ou égal à 1.
   (a) Déterminer $\mathrm{P}(Z_k = 1)$ et déterminer $\mathrm{P}(Z_k = k)$.
   (b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathrm{P}(Z_{k+1} = \ell) = \frac{\ell}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell) + \frac{n - \ell + 1}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell - 1).$$

   (c) En déduire que

$$E(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n}E(Z_k) + 1.$$

(3) (a) Montrer que la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ de terme général $v_k = E(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

(b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1,

$$E(Z_k) = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right).$$

Exercice 4. (*) Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1-p$.

On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

(1) Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ? Rappeler la valeur de leurs espérances.

On définit la variable aléatoire X de sorte que que $X = i$ si les i premières boules tirées sont blanches et la $(i+1)-$ème est verte, ou si les i premières boules tirées sont vertes et la $(i+1)-$ème est blanche.

(2) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
(3) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que

$$E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}.$$

(4) Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \frac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.