ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°11

Solution

Exercice 1.

(1) Le nombre d'oeufs finissant par éclore ne peut être supérieur au nombre d'oeufs pondus. Ainsi,

$$\forall k > n, \qquad P_{X=n}(Z = k) = 0.$$

En revanche, sachant $(X = n)$, Z suit clairement une loi binomiale de paramètres n et p, donc

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \qquad P_{X=n}(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

(2) D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements $\{(X = n) : \; n \in \mathbb{N}\}$, on a , pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P(Z = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_{X=n}(Z = k) P(X = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P_{X=n}(Z = k) P(X = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} \lambda^n \\
&= \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} (1-p)^m \lambda^{m+k} \\
&= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} (\lambda(1-p))^m \\
&= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \\
&= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!},
\end{aligned}$$

et on reconnait à nouveau une loi de Poisson

$$Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p).$$

(3) D'après le cours, une variable aléatoire suivant une loi de Poisson admet une espérance. On en conclut que c'est le cas pour Z et on a même
$$E(Z) = \lambda p.$$

Exercice 2. Soient X et Y deux v.a. indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre p.

(1) On connait l'expression de la fonction de répartition de la loi géométrique mais, dans le doute, on refait le calcul. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\begin{aligned} P(X \leq k) &= \sum_{i=1}^{k} P(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (1-p)^i p \\ &= p \sum_{j=0}^{k-1} (1-p)^j \\ &= p \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} \\ &= 1-(1-p)^k \end{aligned}$$
Il suit que
$$P(X \geq k) = 1 - P(X < k) = 1 - P(X \leq k-1) = 1 - \left(1-(1-p)^{k-1}\right) = (1-p)^{k-1}.$$

(2) On s'intéresse à la variable aléatoire $W = \min(X, Y)$.

(a) Observant que
$$(W \geq k) = [(X \geq k) \cap (Y \geq k)],$$
on utilise l'indépendance des deux v.a. (qui permet de calculer la probabilité de l'intersection ci-dessus comme produit des probabilités) et le fait qu'elles suivent toutes deux la même loi pour écrire
$$\begin{aligned} P(W \geq k) &= P[(X \geq k) \cap (Y \geq k)] \\ &= P(X \geq k) P(Y \geq k) = P(X \geq k)^2 \\ &= \left((1-p)^{k-1}\right)^2 = \left((1-p)^2\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

(b) On détermine alors la loi de W
$$\begin{aligned} P(W = k) &= P(W \geq k) - P(W \geq k+1) \\ &= \left((1-p)^2\right)^{k-1} - \left((1-p)^2\right)^k \\ &= \left((1-p)^2\right)^{k-1} \left(1-(1-p)^2\right) \end{aligned}$$
et on reconnait bien une loi géométrique
$$W \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1-(1-p)^2\right).$$

Exercice 3. (Extrait de **EML 2013**) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $E(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

(1) Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2. En déduire $E(Z_1)$ et $E(Z_2)$.

(2) Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

(a) Déterminer $\mathrm{P}(Z_k = 1)$ et déterminer $\mathrm{P}(Z_k = k)$.

(b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathrm{P}(Z_{k+1} = \ell) = \frac{\ell}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell) + \frac{n - \ell + 1}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell - 1).$$

(c) En déduire que

$$E(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n}E(Z_k) + 1.$$

(3) (a) Montrer que la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ de terme général $v_k = E(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

(b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1,

$$E(Z_k) = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right).$$

(1) En faisant un seul tirage, on obtient forcément un seul numéro. Donc Z_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1. D'où

$$E(Z_1) = 1.$$

En faisant 2 tirages, on peut obtenir soit 2 numéros différents, soit 2 fois le même numéro. L'événement $Z_2 = 1$ signifie qu'au deuxième tirage, on retire la même boule qu'au premier tirage, ce qui a une probabilité $1/n$ d'arriver. On a donc $P(Z_2 = 1) = 1/n$. On a donc également $P(Z_2 = 2) = 1 - 1/n = (n-1)/n$. On peut résumer dans un tableau

i	1	2
$P(Z_2 = i)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$

On a donc

$$E(Z_2) = \frac{1}{n} \times 1 + \frac{n-1}{n} \times 2 = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$

(2) (a) L'événement $Z_k = 1$ signifie qu'on tire k fois la même boule. Il y a n possibilités (soit on tire toujours la boule n°1, soit toujours la boule n°2, ... , soit toujours la boule n°n). Or, en tout, il y a n^k suites de tirages possibles (n possibilités pour chacun des k tirages). Comme il y a équiprobabilité, on en déduit :

$$P(Z_k = 1) = \frac{n}{n^k} = \frac{1}{n^{k-1}}.$$

Pour l'événement $Z_k = k$, on distingue deux cas

- Si $k > n$, on ne peut obtenir au maximum que n résultats différents. Donc l'événement $Z_k = k$ est impossible

$$P(Z_k = k) = 0, \quad \text{si } k > n.$$

- Si $k \leqslant n$, on dénombre. L'événement $Z_k = k$ signifie qu'on a tiré des boules toutes différentes. Il y a A_n^k possibilités pour cela. En effet, il y a n possibilités pour la première boule, puis $n-1$ pour la deuxième (qui doit être différente de la première), ... , puis $n-k+1$ pour la k-ième (qui doit être différente des $k-1$ premières). Ce qui fait en tout

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

possibilités. Et en tout, il y a toujours n^k suites de tirages possibles. D'où

$$P(Z_k = k) = \frac{n!}{n^k(n-k)!}, \quad \text{si } k \leqslant n.$$

(b) Soit $\ell \in [\![1; n]\!]$. L'événement $Z_{k+1} = \ell$ signifie qu'en faisant $k+1$ tirages, on obtient ℓ numéros différents. Et ceci peut se produire de deux manières différentes

- Soit on avait déjà ℓ numéros différents après k tirages, et on a tiré au $(k+1)$-ième tirage un numéro qu'on avait déjà tiré précédemment.
- Soit on avait $\ell - 1$ numéros différents après k tirages, et on a tiré au $(k+1)$-ième tirage un des $n - (\ell - 1)$ numéros qu'on n'avait encore jamais tirés.

Ce qui donne bien

$$\begin{aligned} P(Z_{k+1} = \ell) &= P_{Z_k=\ell}(Z_{k+1} = \ell)P(Z_k = \ell) + P_{Z_k=\ell-1}(Z_{k+1} = \ell)P(Z_k = \ell - 1) \\ &= \frac{\ell}{n}P(Z_k = \ell) + \frac{n-(\ell-1)}{n}P(Z_k = \ell - 1). \end{aligned}$$

(c) On calcule $E(Z_{k+1})$ en se servant de la question précédente

$$\begin{aligned} E(Z_{k+1}) &= \sum_{\ell=1}^{n} \ell P(Z_{k+1} = \ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}P(Z_k = \ell) + \frac{\ell(n-\ell+1)}{n}P(Z_k = \ell - 1) \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}P(Z_k = \ell) + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell(n-\ell+1)}{n}P(Z_k = \ell - 1) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}P(Z_k = \ell) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(j+1)(n-j)}{n}P(Z_k = j) \quad \text{(changement d'indice } j = \ell - 1) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}P(Z_k = \ell) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(j+1)(n-j)}{n}P(Z_k = j) \quad \text{(car } P(Z_k = 0) = 0) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \ell^2 P(Z_k = \ell) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}(-j^2 + nj - j + n)P(Z_k = j) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \ell^2 P(Z_k = \ell) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} j^2 P(Z_k = j) + \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} jP(Z_k = j) + \frac{n}{n}\sum_{j=1}^{n-1} P(Z_k = j) \end{aligned}$$

Or, les deux premières sommes se simplifient; il ne reste que le terme $\ell = n$ de la première somme :

$$\begin{aligned} E(Z_{k+1}) &= \frac{1}{n} \times n^2 P(Z_k = n) + \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} jP(Z_k = j) + \sum_{j=1}^{n-1} P(Z_k = j) \\ &= nP(Z_k = n) + \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} jP(Z_k = j) + \sum_{j=1}^{n-1} P(Z_k = j) \end{aligned}$$

Or, ceci est égal à

$$\frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n} jP(Z_k=j)+\sum_{j=1}^{n} P(Z_k=j).$$

Comme

$$\sum_{j=1}^{n} jP(Z_k=j)=E(Z_k)$$

et

$$\sum_{j=1}^{n} P(Z_k=j)=1,$$

on en déduit que

$$E(Z_{k+1})=\frac{n-1}{n}E(Z_k)+1.$$

(3) (a) Pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= E(Z_{k+1})-n \\ &= \frac{n-1}{n}E(Z_k)+1-n \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{n-1}{n}E(Z_k)-(n-1) \\ &= \frac{n-1}{n}\Big(E(Z_k)-n\Big) \\ &= \frac{n-1}{n}v_k \end{aligned}$$

On en déduit que $(v_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{n-1}{n}$.

(b) On déduit de la question précédente que pour tout $k \geqslant 1$, $v_k = v_1\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$. Or, $v_1 = E(Z_1)-n = 1-n$.
Donc, pour tout $k \geqslant 1$

$$\begin{aligned} v_k &= (1-n)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \\ &= -(n-1)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \\ &= -n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k} \end{aligned}$$

Or, $E(Z_k)=n+v_k$. Donc

$$E(Z_k)=n-n\left(\frac{n-1}{n}\right)^k = n\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right).$$

Exercice 4. (Extrait de **EML 1998**) Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1-p$.

On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

(1) N_V est le rang du premier V dans une suite de tirages indépendants avec $\mathrm{P}(V) = p$ (équiprobabilité des boules) à chaque tirage. Donc $N_V \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et de même $N_B \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)$. D'après le cours, on a donc

$$E(N_V) = \frac{1}{p}, \qquad E(N_B) = \frac{1}{1-p}.$$

On définit la variable aléatoire X de sorte que que $X = i$ si les i premières boules tirées sont blanches et la $(i+1)-$ème est verte, ou si les i premières boules tirées sont vertes et la $(i+1)-$ème est blanche.

(2) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $(X = k)$ signifie que l'on a k verte puis une blanche ou inversement. Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X = k) &= \mathrm{P}((N_V = k+1) \cup (N_B = k+1)) \\ &= \mathrm{P}(N_V = k+1) + \mathrm{P}(N_B = k+1) \\ &= (1-p)^k p + p^k (1-p). \end{aligned}$$

(3) Comme les valeurs prises par la variable aléatoire X sont positives, celle-ci admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(X = k)$ est convergente. Or

$$kP(X = k) = k\left((1-p)^k p + p^k (1-p)\right) = p(1-p)k(1-p)^{k-1} + p(1-p)kp^{k-1},$$

et on reconnait une combinaison de deux termes généraux de séries géométriques dérivées (de raison p et $(1-p)$) convergentes. Donc notre série converge et X admet une espérance. De plus,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left((1-p)^k p + p^k (1-p)\right) \\ &= p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} + p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} \\ &= p(1-p) \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} + p(1-p) \times \frac{1}{(1-p))^2} \\ &= \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}, \end{aligned}$$

ce qui était attendue.

(4) Considérons alors la fonction f définie sur $]0;1[$ par

$$f(p) = E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}.$$

Cette fonction est combinaison de quotients de polynomes dont les dénominateurs ne s'annulent pas sur $]0;1[$ donc elle est dérivable et

$$f'(p) = \frac{2p-1}{p^2(1-p)^2}$$

ce qui permet de dresser le tableau de variations de f

p	0		$1/2$		1
$f'(p)$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$
f	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$

On peut alors conclure que $E(X)$ est minimale lorsque $p = 1/2$ (et elle vaut alors 2); c'est quand on a les mêmes proportion de vertes et de blanches que l'on a en moyenne, les listes monocolore les plus courtes.