ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°12

À rendre au plus tard le 29 Mai

Exercice 1. On considère la suite (a_n) définie, pour $n \geq 2$, par $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

(1) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a
$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leq a_k.$$
(2) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} a_n$.

Exercice 2. Monter, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^n}{k!} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^{-t}\mathrm{d}t.$$
☞ *Indication.* On pourra poser
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^n}{k!}, \quad \text{et} \quad I_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^{-t}\mathrm{d}t$$
et trouver une relation entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$ par intégration par parties.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$
(1) Montrer que (I_n) est décroissante.
(2) Montrer que, pour tout $u \in [0;1]$, $0 \leq 1-u \leq e^{-u}$.
(3) En déduire, à l'aide du changement de variables $x = \sqrt{n}t$ que
$$I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$
(4) Montrer qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que
$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{n}} e^{-x}\mathrm{d}x \leq M.$$
(5) En déduire la limite de (I_n).
(6) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \geq 1$,
$$I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}.$$
(7) En déduire, par récurrence, que
$$I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$