ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°12

Solution

Exercice 1. On considère la suite (a_n) définie, pour $n \geq 2$, par $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

(1) La fonction $t \mapsto 1/t\ln(t)$ est décroissante sur $[2; +\infty[$ (et en particulier sur $[k; k+1]$, pour tout entier $k \geq 2$). Ainsi, pour tout $t \in [k; k+1]$

$$\frac{1}{t\ln(t)} \leq \frac{1}{k\ln(k)} = a_k.$$

Par positivité de l"intégrale, et comme $\int_k^{k+1} \mathrm{d}t = 1$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leq a_k.$$

(2) On passe à la somme. D'après la question précédente, et à l'aide du changement de variable $u = \ln(t)$, (qui donne $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t/t$)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} a_k &\geq \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \\
&= \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} && \text{(par Chasles)} \\
&= \int_{\ln(2)}^{\ln(n+1)} \frac{\mathrm{d}u}{u} && (u = \ln(t)) \\
&= [\ln(u)]_{\ln(2)}^{\ln(n+1)} \\
&= \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(2)}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.
\end{aligned}$$

Par comparaison des séries à termes positifs, on peut donc conclure que la série $\sum_{k\geq 2} a_k$ diverge.

Exercice 2. (D'après **ESCP 1998**) On veut donc montrer, par récurrence, la formule classieuse

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^n}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

Commençons donc par initialiser cette formule, pour $n = 0$. On vérifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(-1)^0\frac{x^0}{0!} + (-1)^1\int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!}e^{-t}\mathrm{d}t &= 1 - \int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= 1 - [-e^{-t}]_0^x \\ &= 1 - (-e^{-x} + 1) \\ &= e^{-x},\end{aligned}$$

et la formule est donc vérifiée. Pour le caractère héréditaire de celle-ci, suivons l'indication en posant

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^n}{k!}, \quad \text{et} \quad I_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^{-t}\mathrm{d}t$$

et observons un lien entre $I_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$. (La fonction dans l'intégrale définissant $I_n(x)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle l'est surtout intervalle fermé borné ne posant donc aucun problème à la définition de celle-ci.) En effet, soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Sachant que $(n+1)/(n+1)! = 1/n!$, on a

$$\begin{aligned}I_{n+1}(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{-(x-t)^{n+1}e^{-t}}{(n+1)!}\right]_0^x - \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - I_n(x).\end{aligned}$$

Supposons alors vraie la formule au rang $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. On voit alors que

$$\begin{aligned}S_{n+1}(x) + (-1)^{n+2}I_{n+1}(x) &= S_n(x) + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^{n+2}\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - I_n(x)\right) \\ &= S_n(x) + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!} - (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^{n+3}I_n(x) \\ &= S_n(x) + (-1)^{n+1}I_n(x) \qquad \left(\text{car } (-1)^{n+3} = (-1)^{n+1}\right) \\ &= e^{-x} \qquad (\text{par HR}),\end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

Exercice 3. *Cet exercice, d'un bon niveau, propose un réel bilan du chapitre d'intégration. On lui accordera donc l'importance qui lui est due.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

(1) Pour tout $t \in [0;1]$, $1 - t^2 \in [0;1]$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq (1-t^2)^{n+1} \leq (1-t^2)^n \leq 1.$$

Par positivité de l'intégrale, il suit que

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq 1$$

et la suite (I_n) est alors bien décroissante. (On peut même ajouter, vu qu'elle est minorée par 0 qu'elle est convergente par application du théorème de convergence monotone mais ce n'est pas demandé dans cette question.)

(2) On sait que la fonction $x \mapsto e^x$ est *convexe* sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée seconde est strictement positive). Ainsi, sa courbe est au dessus de toutes ses tangentes, notamment celle en 0 d'équation $y = 1 + x$. En appliquant à $x = -u$, on obtient bien $1 - u \leq e^{-u}$.

(3) Le changement de variables $x = \sqrt{n}t$ est affine. Il donne

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{d}u, \qquad t^2 = \frac{x^2}{n}.$$

Il suit que

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \mathrm{d}x.$$

En appliquant maintenant l'inégalité $1_u \leq e^{-u}$ à $u = x^2/n$, et par croissante de la fonction $u \mapsto u^n$ (et par positivité de l'intégrale) on obtient

$$I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(e^{-x^2/n}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

(4) Soit $n \geq 1$. L'idée est de découper, par Chasles, l'intégrale entre 0 et $\sqrt{n}$ en deux intégrales: celle entre 0 et 1 et celle entre 1 et $\sqrt{n}$. Pour $x \geq 1$, on a $x^2 \geq x$ et donc $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Par positivité de l'intégrale, on obtient bien

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \mathrm{d}x \leq \int_0^1 e^{-x^2} \mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{n}} e^{-x} \mathrm{d}x.$$

Mais alors, la première intégrale est celle d'une fonction continue sur un segment; bien qu'on ne soit pas en mesure de la calculer, sa valeur est finie. On peut en revanche calculer la seconde. En effet

$$\int_1^{\sqrt{n}} e^{-t} \mathrm{d}t = [-e^{-t}]_1^{\sqrt{n}} = e - e^{-\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e - 1.$$

En particulier, étant convergente, la suite définie par cette intégrale est majorée. Au final, la somme des deux intégrale est bien majorée (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) et on a bien l'existence de la constante $M \geq 0$ demandée.

(5) Combinant les Questions (3) et (4), on obtient

$$0 \leq I_n \leq \frac{M}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par le théorème des gendarmes, on peut donc conclure que $I_n \longrightarrow 0$, $n \to +\infty$.

(6) Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t^2)(1-t^2)^{n-1} \mathrm{d}t \\
&= I_{n-1} - \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{n-1} \mathrm{d}t = I_{n-1} - \int_0^1 t \times t(1-t^2)^{n-1} \mathrm{d}t \\
&= I_{n-1} - \left[-t\frac{(1-t^2)^n}{2n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1-t^2)^2}{2n} \mathrm{d}t \\
&= I_{n-1} - \frac{I_n}{2n}
\end{aligned}$$

Il observe alors que

$$I_n = I_{n-1} - \frac{I_n}{2n} \Longleftrightarrow I_n \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = I_{n-1} \Longleftrightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

(7) Vérifions la formule par récurrence. Pour $n = 0$, c'est facile. En effet

$$I_0 = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1 = \frac{(2^0 0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!}.$$

Supposons alors que la formule soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} I_n \\
&= \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n+2)!} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+2)(2^n n!)^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \\
&= \frac{(2(n+1))^2 (2^n n!)^2}{(2n+3)!} = \frac{(2 \times 2^n \times (n+1) \times n!)^2}{(2(n+1)+1)!} \\
&= \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!},
\end{aligned}$$

et la récurrence est bien démontrée.