ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°1

Solution

Exercice 1. On applique les règles bien connues et rappelées dans ce chapitre:

$$\begin{aligned} A &= \left|\ln(9) - 3\ln(|-6|) + 2\ln\left(\sqrt{(-2)^4}\right)\right| = |\ln(3^2) - 3\ln(2\times 3 + 2\ln(2^2))| \\ &= |2\ln(3) - 3\ln(2) - 3\ln(3) + 4\ln(2)| = |\ln(2) - \ln(3)| \\ &= -\ln\left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

car $\ln(2/3) < 0$. Pour la seconde expression, on factorise par $(-1/2)^{n-2}$:

$$\begin{aligned} B_n &= -8\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(-8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 5\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(-2-3+5) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 2. (Équations)

(1) En remarquant que $2^4 = 16$ et en jouant avec les puissances, on peut réécrire l'équation sous une forme qui en guidera la résolution via un premier changement de variable $X = 2^x$

$$(E_1) \qquad 16^x - 2^{2x+1} = 3 \iff (2^x)^4 - 2(2^x)^2 - 3 = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} X &=& 2^x \\ X^4 - 2X - 3 &=& 0 \end{array}\right.$$

On reconnait une équation bicarrée d'inconnue X que l'on résout en posant $Z = X^2$. on est alors amené à résoudre $Z^2 - 2Z - 3 = 0$, équation du second degré dont les solutions sont $Z = 3$ et $Z = -1$. En revenant à X, il faut alors résoudre $X^2 = -1$ (qui n'a pas de solution) et $X^2 = 3$ qui admet $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ comme solutions. Mais ce n'est pas terminé, il faut encore revenir à x, en résolvant $2^x = X = \pm\sqrt{3}$. Étant clair que $X = 2^x = \exp(x\ln(2)) > 0$, on a seulement

$$2^x = \sqrt{3} \iff \exp(x\ln(2)) = \sqrt{3} \iff x = \frac{\ln(\sqrt{3})}{\ln(2)} = \frac{\ln(3)}{2\ln(2)}.$$

(2) (a) Multiplions par la quantité conjuguée

$$1 - \sqrt{x^2+1} = \frac{1^2 - \sqrt{x^2+1}^2}{1+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1 - x^2 - 1}{1+\sqrt{x^2+1}} = \frac{-x^2}{1+\sqrt{x^2+1}}.$$

Le signe de cette quantité est le même que celui de $-x^2$: c'est partout négatif et cela ne s'annule qu'en 0.

(b) Il suffit ici de factoriser et d'utiliser la question précédente:

$$(E_2) \iff \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 - x = 0 \iff \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - (1+x) = 0 \iff (x+1)\,\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

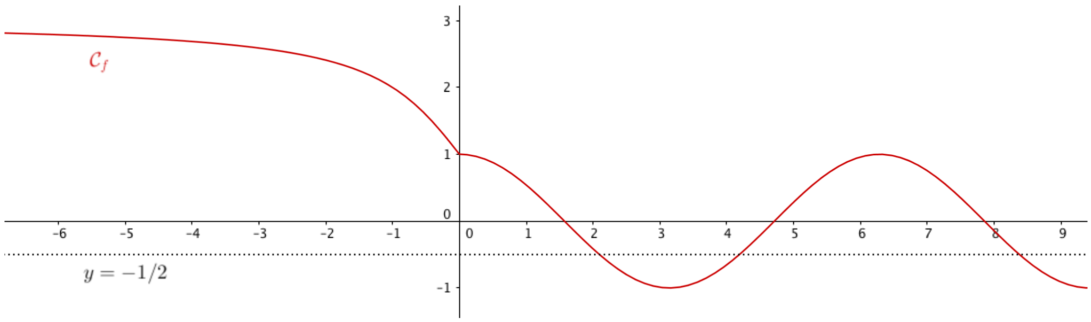
D'après la question précédente, $\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ ne s'annule qu'en 0 et il est clair $x+1$ ne s'annule qu'en -1. On a donc obtenu toutes les solutions

$$\mathcal{S} = \{0; -1\}.$$

Exercice 3. D'après l'énoncé, il faut qu'en 0, f prenne la valeur 1 (donc la courbe passe par le point $(0;1)$. La deuxième condition signifie que $f(x)$ ne s'écarte de la valeur $f(0)=1$ qu'au plus de 2, c'est à dire que, pour tout x réel, $f(x)$ est compris entre -1 et 3:

$$|f(x)-1| \leq 2 \iff -2 \leq f(x)-1 \leq 2 \iff -1 \leq f(x) \leq 3.$$

Enfin, la troisième condition impose qu'il existe un réel strictement positif pour lequel f prend une valeur strictement inférieure à $-1/2$. On propose donc une courbe comme ci-dessous:



Exercice 4. Pour montrer l'inégalité demandée, on étudie la fonction différence. En posant $\varphi(x) = \ln(1-x) + x + x^2$, il faut donc montrer que pour tout $x \in [0;1/2]$, on a $\varphi(x) \geq 0$. La fonction est dérivable sur l'intervalle en question (comme combinaison de fonctions usuelles dérivables) et on a

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 + 2x = \frac{-2x^2+x}{1-x} = \frac{x(1-2x)}{1-x} \geq 0, \text{ si } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

Ainsi φ est bien croissante sur l'intervalle précédent, mais $\varphi(0)=0$ donc $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$, et on a bien l'inégalité demandée.

Exercice 5. (Extrait de **EML 1996**) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}.$$

(1) Comme dans le cas de (quotient de) combinaisons d'exponentielles, on écrit $1 = e^{2x}e^{-2x}$ et on factorise par e^{-2x}. En effet,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{e^{-x}}{e^{-2x}+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-2x}(1+e^{2x})} \\ &= \frac{e^{-x}e^{2x}}{e^{2x}+1} = f(x), \end{aligned}$$

et f est bien paire.

(2) La fonction étant définie sur $\mathbb{R}$ et paire, il suffit de déterminer la limite en $+\infty$, celle de l'autre côté sera la même. On factorise alors au numérateur et au dénominateur par le terme prépondérant

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}(1+e^{-2x})} = \frac{1}{e^x + e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, la courbe de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ (et aussi en $-\infty$).

(3) f est le quotient de deux fonctions usuelles dérivables dont le dénominateur ne s'annule jamais, elle est donc également dérivable. De plus, on a

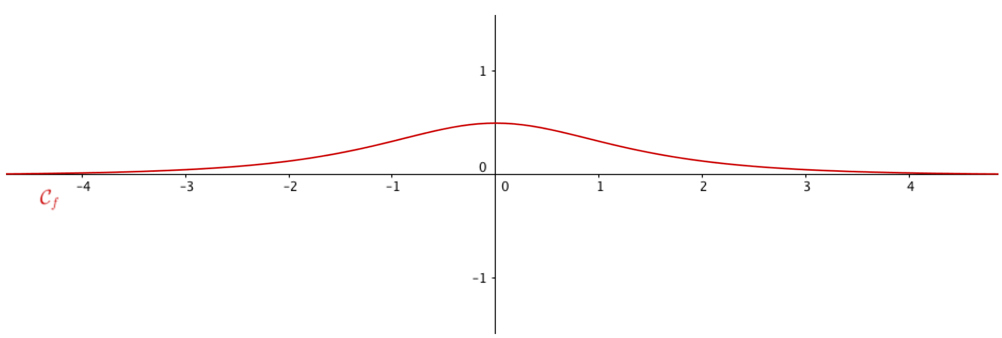
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(e^{2x}+1) - e^x \cdot 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} \\ &= \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{(1-e^{2x})e^x}{(1+e^{2x})^2} \\ &= \left(\frac{(1-e^{2x})}{1+e^{2x}}\right) f(x). \end{aligned}$$

On constate donc que $f'(x)$ est du signe de $1 - e^{2x}$ qu'on détermine les doigts dans le nez. On peut donc dresser le tableau de variations:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

On constate notamment que f admet un maximum, en 0, qui vaut 1/2, ce qui signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 1/2$.

(4) On enchaîne avec un joli dessin:



(5) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après une question précédente,

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| \left(\frac{(1-e^{2x})}{1+e^{2x}}\right) f(x) \right| \\ &= \left| \frac{(1-e^{2x})}{1+e^{2x}} \right| \cdot f(x) \qquad \text{(car } f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Comme on sait déjà que f admet 1/2 pour maximum, il reste donc à montrer que

$$\left| \frac{(1-e^{2x})}{1+e^{2x}} \right| \leq 1.$$

Mais,

$$\begin{aligned}\left|\frac{(1-e^{2x})}{1+e^{2x}}\right| &= \frac{|1-e^{2x}|}{1+e^{2x}} \\ &\leq \frac{1+|-e^{2x}|}{1+e^{2x}} \qquad \text{(d'après l'inégalité triangulaire)} \\ &\leq \frac{1+e^{2x}}{1+e^{2x}} = 1 \\ \left|\frac{(1-e^{2x})}{1+e^{2x}}\right| &\leq 1,\end{aligned}$$

ce qui termine la question (et l'exercice).

Exercice 6. On va factoriser dans la racine par le terme prépondérant pour le "faire sortir" puis on enchaîne avec une factorisation plus globale de l'expression. Pour $x > 0$

$$f(x) = \sqrt{x^2-3x+4} - 3x = x\left(\sqrt{1-3/x+4/x^2} - 3\right)$$

or, $\sqrt{1-3/x+4/x^2} - 3$ tend vers -2 lorsque $x \to +\infty$, donc on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$

et il découle également que

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1-3/x+4/x^2} - 3 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -2.$$

On regarde donc la limite de la distance de la courbe de f à la droite d'équation $y = -2x$. On doit multiplier par la quantité conjuguée car la méthode précédente laisse une forme indéterminée.

$$\begin{aligned}f(x) - (-2x) &= \sqrt{x^2-3x+4} - 3x + 2x = \sqrt{x^2-3x+4} - x \\ &= \frac{x^2-3x+4-x^2}{\sqrt{x^2-3x+4}+x} = \frac{-3x+4}{\sqrt{x^2-3x+4}+x} \\ &= \frac{x\,(-3+4/x)}{x\left(\sqrt{1-3/x+4/x^2}+1\right)} \\ &= \left(\frac{-3/x+4/x}{\sqrt{1-3/x+4/x^2+1}}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{3}{2},\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que la courbe admet pour asymptote oblique en $+\infty$ la droite d'équation $y = -2x - 3/2$.