ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°2

À rendre le 4 Octobre

Exercice 1.

(1) Déterminer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que le polynôme $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex$ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x+1) - P(x) = x^4.$$

☞ On présentera le polynôme sous forme factorisée, avec la remarque que

$$6x^4 - 15x^3 + 10x^2 - 1 = (x-1)(2x-1)(3x^2 - 3x - 1).$$

(2) En appliquant la relation satisfaite par le polynôme $P(x)$ à $x = k \in \mathbb{N}$, déterminer une formule pour

$$\sum_{k=1}^{n} k^4.$$

(3) *Bonus.* Redémontrer la formule trouvée à la question précédente par récurrence.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$.

(1) Étudier f (limites et variations). Représenter l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi que la tangente T_0 en $x = 0$ (on commencera par préciser les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et T_0).

(2) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p+1}.$$

(3) On définit une suite (u_n) en posant

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$

(a) Expliciter les cinq premiers termes de la suite (u_n).

(b) À l'aide de la Question (2), montrer par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

(c) Que penser des termes u_n pour n très grand?

(d) Que fait le programme suivant?

```
epsilon=input('Entrer un nombre strictement positif: ');
n=floor((1-epsilon)/epsilon)+1;
u=1;
for k=1:n
    u=u/(u^2+u+1);
end
disp(u)
```

Exercice 3. Écrire un programme, sous `SciLab`, qui demande à l'utilisateur de saisir une année (du calendrier grégorien) et affiche si l'année en question était/est/sera une année bissextile.

Exercice 4. On considère la suite (u_n) définie par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{2u_n + 1}{1 + u_n} \end{array} \right. .$$

(1) Déterminer les quatre premiers termes de la suite.
(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$. (On pourra étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto (2x + 1)/(1 + x)$ et procéder par récurrence.)
(3) Montrer, par récurrence, que (u_n) est croissante.