Devoir Maison n°2

Solution

Exercice 1.

(1) On procède par identification. La partie désagréable étant de développer. On regroupe ensuite les termes selon la puissance de x (on omet ici toutes les étapes du développement des puissances qu'on laisse au lecteur le soin de vérifier en noircissant des pages de brouillon si nécessaire)

$$\begin{aligned} P(x+1)-P(x) &= a(x+1)^5+b(x+1)^4+c(x+1)^3+d(x+1)^2+e(x+1)-ax^5-bx^4-cx^3-dx^2-ex \\ &= 5ax^4+(10a+4b)x^3+(10a+6b+3c)x^2+(5a+4b+3c+2d)x+(a+b+c+d+e) \end{aligned}$$

Par conséquent, on est ramené à un système. En effet, par identification

$$\begin{aligned} P(x+1)-P(x)=x^2 \quad &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 5a &=& 1 \\ 10a+4b &=& 0 \\ 10a+6b+3c &=& 0 \\ 5a+4b+3c+2d &=& 0 \\ a+b+c+d+e &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 1/5 \\ b &=& -1/2 \\ c &=& 1/3 \\ d &=& 0 \\ e &=& -1/30 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire

$$P(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x=\frac{1}{30}\left(6x^5-15x^4+10x^3-x\right).$$

On utilise alors l'indication pour factoriser le polynôme:

$$P(x)=\frac{x(6x^4-15x^3+10x^2-1)}{30}=\frac{x(x-1)(2x-1)(3x^2-3x-1)}{30}.$$

(2) On utilise la relation précédente, appliquée à $x=k$ pour obtenir une somme télescopique:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^4 &= \sum_{k=0}^{n} (P(k+1)-P(k)) \\ &= P(n+1)-P(0) \qquad \text{(par télescopage)} \\ &= P(n+1) \qquad \text{(car } P(0)=0\text{)} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \end{aligned}$$

(3) *Bonus.* On redémontre (non sans effort) la formule par récurrence:

- <u>initialisation:</u> pour $n=0$ c'est trivial car les deux quantités sont nulles pour $n=0$.
- <u>hérédité:</u> Supposons que, pour un certain $n \geq 0$, on ait

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},$$

montrons alors que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^4 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)(3n^2+9n+5)}{30} = \frac{(n+1)(6n^4+39n^3+91n^2+89n+30)}{30}$$

Mais,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^4 &= \sum_{k=0}^{n} k^4 + (n+1)^4 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} + \frac{30(n+1)^4}{30} \\
&= \frac{(n+1)\left(n(2n+1)(3n^2+3n-1)+30(n+1)^3\right)}{30} \\
&= \frac{(n+1)(6n^4+39n^3+91n^2+89n+30)}{30},
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

Exercice 2.

(1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}.$$

(a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule jamais. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x^2+x+1-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2} \\
&= \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+x+1)^2}.
\end{aligned}$$

Le signe de cette dérivée s'obtient très facilement et permet de voir que f est décroissante sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$ et croissante sur $[-1;1]$. De plus, en factorisant par le terme prépondérant, on voit que

$$f(x) = \frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci nous permet de dresser un joli tableau de variations, que voici:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

(b) La tangente T à C en 0 a pour équation

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0)+f(0) \\ y &= x \end{aligned}$$

(c) Étudier la position de C par rapport à T revient à chercher le signe de $f(x)-x$. Or,

$$\begin{aligned} f(x)-x &= \frac{x}{x^2+x+1} - \frac{x(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \\ &= \frac{-x^3-x^2}{x^2+x+1} \\ &= -\frac{x^2(x+1)}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

ce qui ne s'annule qu'en $x=0$ ou $x=-1$. Ainsi, les points d'intersection de C et T sont

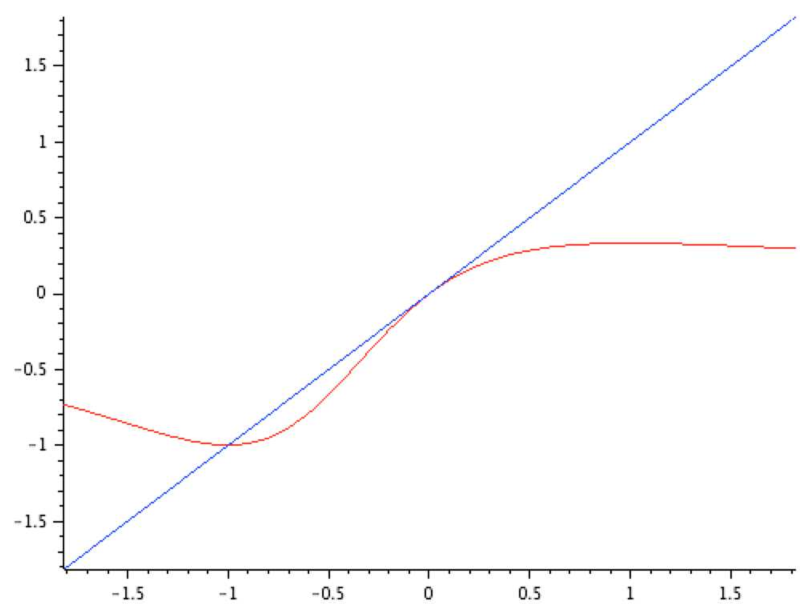
$$(0, f(0)) = (0,0) \qquad \text{et} \qquad (-1, f(-1)) = (-1,-1).$$

De plus, on trouve facilement le signe de $f(x)-x$ qu'on résume dans le tableau ci-dessous:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$-$	

En particulier, sur l'intervalle $]-\infty;-1]$, C est au dessus de T mais est au dessous de T sur $[-1;+\infty[$.

(d) On représente les deux éléments, grâce à `SciLab`:



(2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$u_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{u_n^2+u_n+1}.$$

(a) Soit p un entier naturel non nul. On a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{p}\right) &= \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}+1} \\ &= \frac{1}{p} \times \frac{p^2}{1+p+p^2} \\ &= \frac{p}{p^2+p+1} \\ &\leq \frac{p}{p^2+p} \\ &= \frac{1}{p+1}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(b) Pour $n = 0$, $0 < u_0 = 1 \leq 1/(0+1)$ donc la propriété est vraie. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 < u_n \leq 1/(n+1)$, comme f est croissante sur $[-1;1]$ (et que par HR u_n en est un élément, tout comme $1/n+1$), on a

$$0 = f(0) < u_{n+1} = f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1+1} = \frac{1}{n+2}$$

par la question précédente. L'encadrement voulu est ainsi démontré.

(c) L'encadrement de u_n par 0 d'un côté et $1/(n+1)$ de l'autre, nous pousse à penser (en anticipant sur le chapitre précédent), que les termes de la suite (u_n) se rapprochent de 0 car $1/(n+1)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ (on verra qu'on conclut à la *convergence* de (u_n) vers 0 par application du *théorème des gendarmes*).

(d) Le programme permet d'afficher un terme u_n de la suite dont le rang n est solution de $n > (1-\varepsilon)/\varepsilon)$. (On prend la partie entière car le rang doit être un entier.) Cette inéquation est équivalente à $(1/(n+1) < \varepsilon$. Ainsi, le programme affiche un terme de la suite *arbitrairement* proche de 0 (c'est à dire plus petit qu'un réel aussi petit qu'on veut, rentré par l'utilisateur) et dont tous les termes suivants seront plus petits.

Exercice 3. Une année bissextile est plus ou moins caractérisée par le fait qu'elle est divisible par 4. On peut tester si un nombre entier A est divisible par 4 en testant si son quotient par 4 est un entier avec sa partie entière:

$$A \in \mathbb{N}\text{divisible par 4} \quad \Longleftrightarrow \frac{A}{4} \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor = \frac{A}{4}$$

ainsi, on pourra utiliser la commande

```
floor(A/4) ==A/4.
```

On accepte alors, dans ce DM, cette approche simplifiée de l'année bissextile et un programme comportant uniquement ce test. Cela dit, pour les fins de siècle c'est un peu plus subtil. Par exemple, 1900 n'était pas bissextile (bien que divisible par 4). Il faut alors, si l'année est divisible par 100, distinguer si l'année est divisible par 400. Ce qui donne le programme suivant:

```
A=input('Entrer une année à tester: ');
if floor(A/4)==A/4 then
    if floor(A/100)==A/100 then
        if floor(A/400)==A/400 then
            disp('Année bissextile')
        else
            disp('Année non bissextile')
        end
    else
        disp('Année bissextile')
    end
else
    disp('Année non bissextile')
end
```

Exercice 4. On considère la suite (u_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{2u_n+1}{1+u_n} \end{array}\right. .$$

(1) On utilise la définition par récurrence de la suite

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{2u_0+1}{1+u_0} = \frac{3}{2}, \quad u_2 = \frac{2u_1+1}{1+u_1} = \frac{8}{5}, \quad u_3 = \frac{2u_2+1}{1+u_2} = \frac{21}{13}.$$

(2) La fonction $f : x \mapsto (2x+1)/(1+x)$ est définie (et dérivable) sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. De plus,

$$f'(x) = \frac{2(1+x)-(2x+1)}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$. On montre alors que $1 \leq u_n \leq 2$ par récurrence:

- initialisation: pour $n=0$, on a $u_0 = 1$ qui vérifie bien $1 \leq u_0 \leq 2$.
- hérédité: supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $1 \leq u_n \leq 2$. Alors, par croissance de f sur $[1;2]$, les inégalités sont préservées

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(2).$$

Or, $f(1) = 3/2 \geq 1$, $f(2) = 5/3 \leq 2$ et bien sûr $f(u_n) = u_{n+1}$. Au final, on a bien

$$1 \leq f(1) \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq f(2) \leq 2$$

et la récurrence est bien démontrée.

(3) On procède également par récurrence en utilisant la croissance de f. On montre donc que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq u_{n+1}$.

- initialisation: pour $n=0$, d'après la première question, on a bien $u_0 \leq u_1$.
- hérédité: supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq u_{n+1}$. Alors, appliquer f préserve l'inégalité car f est croissante, et on obtient

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2},$$

et la récurrence est ainsi démontrée.

Remarque. Montrer la croissance de (u_n) revient à montrer que $f(u_n) - u_n \geq 0$. Ainsi, on aurait pu procéder *via* l'étude du signe de $f(x) - x$. Sachant que tous les termes de la suite sont compris entre 1 et 2, on peut limiter l'étude du signe à cet intervalle. Seulement, en procédant comme tel, on constate que

$$f(x) - x = \frac{-x^2+x-1}{1+x}$$

et on a le tableau de signes

x	1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	2
$f(x)-x$	$+$	0	$-$

Notamment, le signe de $f(x) - x$ n'est pas constant sur $[1; 2]$. Il faut alors préciser l'intervalle où se trouvent les termes de la suite si on veut pouvoir appliquer la tableau précédent à l'étude de monotonie de la suite. En effet, on peut adapter la récurrence de la Question (2), pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement plus précis

$$1 \leq u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Une fois cet ajustement précisé, on peut appliquer le tableau de signe à $x = u_n$ et voir que sur l'intervalle dans lequel se trouvent tous les termes de la suite $f(x) - x \geq 0$ et conclure que la suite est croissante.