ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°3

Solution

Exercice 1. (D'après **EML 2016**)

(1) On note $f : x \longmapsto x^2 - x\ln(x)$.

(a) L'expression de $f(x)$ comporte du $\ln(x)$ ce qui impose que $x > 0$. Ainsi, $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.

(b) En $+\infty$, c'est clairement x^2 qui l'emporte, une factorisation suivie d'un argument de croissance comparée permet donc de conclure:

$$f(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

En 0^+, c'est aussi une croissance comparée (en effet $x\ln(x) \to 0$), et on a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

(c) On admet donc que f est deux fois dérivables sur $]0; +\infty[$ (c'est assez clair, c'est une combinaison de fonctions usuelles qui sont infiniment dérivables sur l'intervalle susnommé). Les formules de dérivation donnent

$$f'(x) = 2x - \ln(x) - x \times \frac{1}{x} = 2x - \ln(x) - 1$$

et

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}.$$

(d) On va donc utiliser le signe de $f''(x)$ pour déterminer les variations de f', trouver son minimum (qui s'avèrera positif), conclure au signe de $f'(x)$ et donc aux variations de f en remarquant que

$$f'(1/2) = -\ln(1/2) = \ln(2) > 0.$$

x	0		$1/2$		$+\infty$
$f''(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f'	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$		$+$		
f	$\|\|$ 0		$\nearrow$		$+\infty$

En particulier, f est strictement croissante sur son ensemble de définition. Ce qui sera bien pratique.

(2) C'est une récurrence classique. On vérifie aisément que $u_0 = 1/2$ est bien compris entre $1/2$ et 1. Supposons alors que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $1/2 \leq u_n \leq 1$. Comme f est croissante, on a donc

$$f(1/2) \leq f(u_n) \leq f(1).$$

Or,

$$f(1) = 1, \quad f(u_n) = u_{n+1}$$

et

$$f(1/2) = \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \ln(2)\right) > \frac{1}{2} \quad \text{car} \quad \ln(2) \simeq 0,69 > \frac{1}{2}.$$

Au final, on a bien

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1,$$

ce qui est bien la propriété au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(3) C'est encore une récurrence. On voit que $u_1 = f(u_0) = f(1/2) > 1/2$ d'après la remarque précédente, donc $u_0 \leq u_1$ initialise bien la démonstration. Supposons alors que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq u_{n+1}$, par croissance de f on aura

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2},$$

ce qui est la propriété au rang $n+1$ et termine donc la récurrence. Ainsi (u_n) est bien croissante.

(4) Par le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) étant croissante et majorée par 1, elle converge par une limite ℓ. Par passage à la limite dans les inégalités obtenues à la question (2), on a de plus

$$\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1.$$

(5) On pose $g(x) = x - \ln(x) - 1$. Cette fonction est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a $g'(x) = 1 - 1/x = (x-1)/x$ ce qui permet de dresser son tableau de variations sans difficulté (en remarquant que $g(1/2) = \ln(2) - 1/2 > 0$ et $g(1) = 0$).

x	$1/2$		1
$g'(x)$		$-$	0
g	$g(\frac{1}{2})$	$\searrow$	0

Comme g est strictement décroissante sur $[1/2; 1]$, alors, pour tout $x \in [1/2; 1]$, $g(x) > g(1) = 0$. En particulier, 1 est l'unique antécédent de 0 par g sur $[1/2; 1]$, ou encore $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

(6) Comme $\ell \in [1/2; 1]$ et que f est continue sur $[1/2; 1]$ et que $u_{n+1} = f(u_n)$, le passage à la limite donne

$$\ell = f(\ell).$$

Mais on constate, comme $\ell > 0$, que

$$\ell = f(\ell) \Longleftrightarrow \ell^2 - \ell \ln(\ell) = \ell \Longleftrightarrow \ell - \ln(\ell) = 1 \Longleftrightarrow g(\ell) = 0 \Longleftrightarrow \ell = 1.$$

(7) Le programme à écrire est ultra-classique. Il est important de savoir écrire ce genre de programme faisant intervenir une boucle `while`.

```
u=1/2;
n=0;
while 1-u>=10^(-4)
    u=u^2-u*log(u);
    n=n+1;
end
disp(n)
```

Exercice 2.

(1) On démontre celà par récurence. C'est clairement vrai pour $n = 1$. Soit alors $n \geq 1$ tel que $n! \geq n$.. On sait que $(n+1)! = (n+1)\, n! \geq n+1$ car $n! \geq n \geq 1$. La récurrence est ainsi démontrée. Donc pour tout entier $n \geq 1$, $n! \geq n$, il suit, par théorème de comparaison, qu'on a bien

$$n! \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty.$$

(2) (a) On étudie le signe de $S_{n+1} - S_n$:

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$$

donc la suite (S_n) est bien croissante. On fait la même chose pour (T_n):

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0 \end{aligned}$$

si $n \geq 1$, et la suite (T_n) est bien décroissante.

(b) On a $S_n - T_n = 1/n! \geq 0$. Or comme (S_n) est croissante et (T_n) décroissante, on a pour tout entier$n$

$$S_1 \leq S_n \leq T_n \leq T_1.$$

Donc la suite (S_n) est majorée par T_1 et la suite (T_n) est minorée par S_1.

(c) Par application du théorème de convergence monotone, ces deux suites sont donc convergentes, *a priori* vers deux limites différentes. Soit ℓ la limite de (S_n). Comme $T_n = S_n + 1/n!$ et que $1/n! \to 0$, il est clair que $T_n \to \ell$ et les deux suites ont même limite.

De plus, comme (S_n) est croissante, on a pour tout entier n $S_n \leq \ell$ et comme (T_n) est décroissante, $\ell \leq T_n$, ou encore

$$S_n \leq \ell \leq T_n.$$

(d) De l'inégalité précédente, on déduit que

$$0 \leq \ell - S_n \leq T_n - S_n = \frac{1}{n!}$$

donc, par transitivité dans l'inégalité ci dessus, dès que $1/n! \leq \varepsilon$ (ou encore $n! \geq 1/\varepsilon$) on aura l'écart entre S_n et ℓ plus petit que ε ce qui se reformule par le fait que S_n donne une approximation de ℓ à ε près.

(3) (a) Il suffit de calculer $n!$ tant qu'on a pas dépassé $1/\varepsilon$. Attention, il faut deux variables: une qui représente n (qui est la quantité qu'on veut) et une qui calcule et utilise $n!$.

```
function n=depassement(epsilon)
    n=1;
    f=1; //f représente n!
    while f<1/epsilon
        n=n+1;
        f=f*n;
    end
endfunction
```

(b) On complète donc le programme pour qu'il permette de calculer une valeur approchée de ℓ à ε près, c'est à dire qu'il calcule S_n pour n correspondant à celui obtenu par la fonction `depassement()`. La variable de sortie représente donc S_n, initialisée à $S_1 = 1 + 1 = 2$.

```
function y=valeur_approchee(epsilon)
    y=2;
    f=1; //représente n!
    for k=2:depassement(epsilon)
        f=f*k;
        y=y+1/f;
    end
endfunction
```

(c) On fait tourner le programme comme demandé. On constate que les valeur affichées sont de plus en plus proche de e ce qui permet de conjecturer que $\ell = e$.

```
-->for k=1:6; disp(valeur_approchee(10^(-k))); end

    2.7083333

    2.7166667

    2.718254

    2.7182788

    2.7182815

    2.7182818

-->exp(1)
 ans  =

    2.7182818
```

(4) (a) Il est nécessaire de sortir le terme correspondant à $k = 1$ de la somme car il s'agit d'une constante. Il est clair que f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'on a

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= e^x - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k!} \\ f'_{n+1}(x) &= e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k.x^{k-1}}{k!} = e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^x - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{!} \\ &= f_n(x) \end{aligned}$$

On en déduit (les variations de f_n et) le signe de $f_n(x)$ par récurrence:

- Pour $n = 0$, $f_0(x) = e^x - 1$. f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_0(x) = e^x > 0$. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$. Et comme $f_0(0) = e^0 - 1 = 0$, on a bien $f_0 \geq 0$ sur $[0, 1]$.
- Soit n tel que $f_n \geq 0$ sur $[0, 1]$. Or $f'_{n+1}(x) = f_n(x) \geq 0$ sur $[0, 1]$ donc f_{n+1} est croissante sur $[0, 1]$. Et comme $f_{n+1}(0) = 0$ on a alors $f_{n+1} \geq 0$ sur $[0, 1]$, ce qui termine la récurrence.

(b) C'est un raisonnement analogue qu'on applique ici. En effet, g_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} g'_{n+1}(x) &= f'_{n+1}(x) - (e-1)\frac{(n+1)x^n}{(n+1)!} \\ &= f_n(x) - (e-1)\frac{x^n}{n!} \\ &= g_n(x). \end{aligned}$$

On étudie les variations de g_n par récurrence:

- Pour $n = 0$, $g_0(x) = e^x - e$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et comme $g_0(1) = 0$ on a bien $g_0 \leq 0$ sur $[0, 1]$.
- Soit n tel que $g_n \leq 0$ sur $[0, 1]$. On sait que $g'_{n+1}(x) = g_n(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$ donc g_{n+1} est décroissante sur $[0, 1]$. Et comme

$$g_{n+1}(0) = 0,$$

il suit que $g_{n+1} \leq 0$ sur $[0, 1]$ ce qui termine la récurrence sur le signe de $g_n(x)$.

Finalement, on a pour tout entier n et tout $x \in [0, 1]$,

$$g_n(x) \leq 0 \Longleftrightarrow f_n(x) \leq (e-1)\frac{x^n}{n!}$$

ce qui donne, en combinant avec la question précédente

$$0 \leq f_n(x) \leq (e-1)\frac{x^n}{n!}.$$

(c) En particulier pour $x = 1$ on obtient pour tout entier n :

$$0 \leq e - S_n \leq \frac{e-1}{n!}$$

(d) Comme $n! \to +\infty$, le théorème des gendarmes donne alors que S_n converge vers e, c'est à dire

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.$$