
Devoir Maison n°4

À rendre le 14 Novembre

Exercice 1. (Ensembles, sous-ensembles, opérations). On considère trois parties A, B, C d'un ensemble E .

(1) Montrer que si $A \cup B = B \cap C$, alors $A \subset B \subset C$.

(2) On note ensuite

$$A \Delta B = \{x \in A \cup B : x \notin A \cap B\}.$$

(a) Faire un dessin pour représenter $A \Delta B$.

(b) Montrer que

$$A \Delta B = (A \cap \complement_E B) \cup (B \cap \complement_E A).$$

(c) Déterminer $A \Delta A$, $A \Delta \emptyset$, $A \Delta E$ et $A \Delta \complement_E A$.

Exercice 2. (Image directe et pré-image) On considère les trois applications

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \longmapsto x^2, \quad x \longmapsto e^x, \quad \text{et} \quad (x, y, z) \longmapsto (2x + y, x - 3y)$$

(1) Déterminer $f([-2; 1])$ et $f^{-1}([-1; 4])$. L'application est-elle injective? surjective? bijective?

(2) Déterminer $g(\mathbb{R})$ et $g^{-1}(]-\infty; 0])$. L'application est-elle injective? surjective? bijective?

(3) Déterminer $h^{-1}(\{(0, 0)\})$. L'application est-elle injective? Montrer que $h(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 3. On effectue huit tirages, avec remise, d'une carte dans un paquet de cartes à jouer classiques. Parmi ces 8 tirages, 2 font apparaître un as, 4 contiennent du coeur, 5 tirages présentent une tête (valet, dame ou roi) et un seul d'entre eux contient une tête de coeur. L'un des tirages fait-il apparaître l'as de coeur? Combien y a-t-il de tirages avec une carte qui n'est ni du coeur, ni un as ni une tête ?

Exercice 4. Séverus Rogue prépare une énigme¹ pour Harry, Hermione et Ron. Il veut disposer différentes bouteilles, en ligne, sur une petite console. Il dispose de 3 bouteilles identiques de Poison, de deux bouteilles (identiques) de vin d'ortie, d'une bouteille d'une potion permettant de passer à travers les flammes et d'une bouteille de polynectar.

(1) Combien y a-t-il de dispositions possibles des 7 bouteilles?

(2) Si il y a n_1 (resp. n_2, n_3, n_4) bouteilles de Poison (resp. vin, potion, polynectar), combien y a-t-il de dispositions possibles?

¹voir *Harry Potter à l'école des sorciers*, J.K. ROWLING, 1997.