ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°4

À rendre le 14 Novembre

Exercice 1.

(1) Pour montrer que $A \subset B \subset C$, il faut d'abord montrer que $A \subset B$, puis que $B \subset C$. Soit alors $x \in A$. Comme $x \in A$, x est en particulier dans $A \cup B$ et par hypothèse, $A \cup B = B \cap C$ donc $x \in B \cap C$ et en particulier $x \in B$. On a donc bien $A \subset B$.

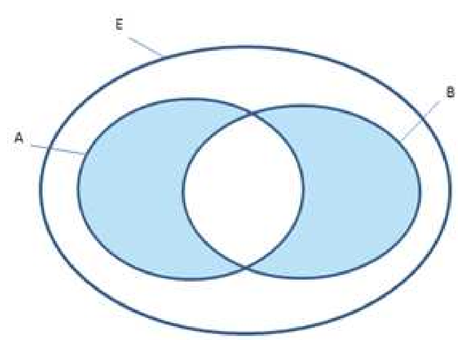
Soit maintenant $x \in B$. Montrons que $x \in C$. Comme $x \in B$, $x \in B \cup A = B \cap C$ et on a bien $x \in C$ donc $B \subset C$. Au final, on a montré

$$A \subset B \subset C.$$

(2) On définit maintenant ce qui s'appelle la *différence symétrique* des ensembles A et B.

$$A \Delta B = \{x \in A \cup B : \ x \notin A \cap B\}.$$

(a) On représente ci-dessous (en bleu), en bleu, la différence symétrique $A \Delta B$.



(b) Par définition

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}),$$

où la dernière égalité découle des lois de Morgan. Mais maintenant, il s'agit d'utiliser les règles de développement de $\cap$ et $\cup$:

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) &= ((A \cup B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cup B) \cap \overline{B}) \\ &= (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})\end{aligned}$$

car $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $B \cap \overline{B} = \emptyset$. Au final, c'est exactement l'égalité souhaitée.

(c) On peut utiliser la question précédente:

$$\begin{array}{rcl} A\Delta A & = & (A\cap \overline{A})\cup(A\cap\overline{A})=\emptyset \\ A\Delta\emptyset & = & (A\cap\overline{\emptyset})\cup(\emptyset\cap\overline{A})=A \\ A\Delta E & = & (A\cap\overline{E})\cup(E\cap\overline{A})=\overline{A} \\ A\Delta\overline{A} & = & (A\cap\overline{\overline{A}})\cup(\overline{A}\cap\overline{A})=E. \end{array}$$

Exercice 2. (Image directe et pré-image) On considère les trois applications

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}, \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} h:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y,x-3y) \end{array}.$$

(1) Si $x\in[-2,1]$, alors on voit que $f(x)\in[0;4]$, ce qui donne $f([-2;1])\subset[0;4]$. Réciproquement, si $y\in[0;4]$ alors y admet $x=\sqrt{y}$ pour antécédent par f donc on a bien $g([-2;1])=[0;4]$. Par un raisonnement un peu analogue, on montre que $f^{-1}([-1;4])$ (qui représente l'ensemble des réels x dont l'image par f tombe dans $[-1;4]$) est $[-2;2]$.

L'application f n'est clairement pas injective ($f(1)=f(-1)=$) ni surjective (on voit par exemple que $f^{-1}(]-\infty;0[)=\emptyset$ car un carré est toujours positif). Elle n'est *a fortiori* pas bijective non plus.

(2) L'exponentielle était strictement positive, il est alors clair que $g^{-1}(]-\infty;0])=\emptyset$ et g n'est donc pas surjective (et ainsi pas bijective). On peut préciser que les éléments atteints sont ceux strictement positifs, c'est à dire que $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}_+^*$. En effet, si $y>0$, alors y admet $x=\ln(y)$ pour unique antécédent, ce qui précise d'ailleurs que l'application est injective.

(3) Par définition,

$$h^{-1}(\{(0,0)\})=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : h(x,y,z)=(0,0)\}.$$

Il faut donc résoudre le système

$$\begin{aligned} h(x,y,z)=(0,0) &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y & = & 0 \\ x-3y & = & 0 \\ z & \in & \mathbb{R} \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y & = & 0 \\ 7y & = & 0 \\ z & \in & \mathbb{R} \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & \in & \mathbb{R} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$h^{-1}(\{(0,0)\})=\{0\}\times\{0\}\times\mathbb{R}.$$

En particulier, h n'est pas injective (le choix de z ne joue aucun rôle). Pour montrer que $h(\mathbb{R}^3)=\mathbb{R}^2$, il faut montrer que tout élément $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ admet (au moins) un antécédent par h dans $\mathbb{R}^3$. Il faut donc encore résoudre un système donc (a,b) est le second membre:

$$h(x,y,z)=(a,b) \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y &=& a \\ x-3y &=& b \\ z &\in& \mathbb{R} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y &=& a \\ 7y &=& a-2b \\ z &\in& \mathbb{R} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& (3a+b)/7 \\ y &=& (a-2b)/7 \\ z &\in& \mathbb{R} \end{array}\right.$$

On a donc bien des solutions (une infinité vu qu'on peut prendre ce qu'on veut pour z) et l'application est bien surjective, ou encore $h(\mathbb{R}^3)=\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Notons E l'ensemble de tous les tirages (on a donc $\#E=8$), A l'ensemble des tirages qui contiennent un as (ainsi $\#A=2$), C l'ensemble des tirages avec un coeur (bien sûr $\#C=4$) et enfin T ceux avec une tête (et donc $\#T=5$). On sait aussi que $\#(T\cap C)=1$. Par définition de ces ensembles, on a également que $\#(T\cap A)=0$ et *a fortiori* que $\#(C\cap A\cap T)=0$ (car c'est inclus dans le précédent).

On veut montrer, dans un premier temps, que $\#(A\cap C)\geq 1$ (c'est à dire qu'il y a au moins un tirage avec l'as de coeur). Si le cardinal de l'intersection précédente était nul, alors, d'après la formule du crible

$$\#(C\cup A\cup T)=\#C+\#A+\#T-\#(C\cap A)-\#(A\cap T)-\#(T\cap C)+\#(C\cap A\cap T)$$

et donc

$$8=\#E\geq \#(C\cup A\cup T)=4+2+5-0-1-0+0 \iff 8\geq 10$$

ce qui est impossible! On en déduit donc que, non seulement on a l'as de coeur, mais qu'en plus, nécessairement $\#(C\cap A)=2$, c'est à dire que les deux tirages avec un as contiennent tous deux l'as de coeur. On constate aussi que $\#(C\cup A\cup T)=8$ et par conséquent $(C\cup A\cup T)=E$ et donc $\#(\overline{C\cup A\cup T})=\#(\overline{C}\cap\overline{A}\cap\overline{T})=0$ et il n'y a aucun tirage avec une carte qui ne soit ni du coeur, ni un as, ni une tête.

Exercice 4.

Dans cette exercice, la situation est tout à fait comparable à celle des anagrammes, les bouteilles en plusieurs exemplaires correspondant aux lettres répétées.

(1) Avec les 7 bouteilles, il y a *a priori* 7! permutations possibles sur la table, mais on ne distinguera pas les permutations où l'on échange les bouteilles de vin entre elles ou celles de poison entre elles. Il faut donc diviser 7! par $3!\times 2!$ correspondant aux permutations des bouteilles de vin et de poison. Au final, le nombre de dispositions différentes est donc

$$\frac{7!}{3!\times 2!}=\frac{7\times 6\times 5\times 4}{2}=420.$$

(2) Il suffit de généraliser le processus. Il y a $n_1+n_2+n_3+n_4$ bouteilles en tout et le nombre de façons de les disposer est

$$\frac{(n_1+n_2+n_3+n_4)!}{n_1!\times n_2!\times n_3!\times n_4!}$$