ECE 1 - Année 2016-2017
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°5 :

À rendre le 20 Novembre

Exercice 1. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{n^k}\times\binom{n}{k}\right)=e.$$

Exercice 2. José regarde la télévision et zappe aléatoirement entre trois programmes (*Télé-Achat*, *Danse avec les stars* et *Le plus grand cabaret du monde*) de la façon suivante:

- À l'instant $n=0$, il regarde une démonstration d'un épluche-légume MP3 qui fait aussi le café présenté au *Télé-Achat*;
- Si à l'instant n, il regarde un programme quelconque, il continue à le regarder à l'instant $n+1$ avec probabilité $2/3$ ou zappe vers l'un des deux autres programmes avec la même probabilité.

On note A_n (resp. B_n, C_n) l'évènement "José regarde le *Télé-Achat* à l'instant n" (resp. *Danse avec les stars*, *Le plus grand cabaret du monde*) et a_n, b_n, c_n les probabilités correspondantes.

(1) Que vaut $a_n+b_n+c_n$?
(2) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
(3) Même question pour b_{n+1} et c_{n+1}.
(4) Montrer que
$$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n-b_n)\qquad\text{et}\qquad a_{n+1}-c_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n-c_n).$$
(5) En déduire l'expression des termes généraux des trois suites en fonction de n.

Exercice 3.

(1) Soient m,k deux entiers. Justifier que
$$\binom{m+k}{m}=\binom{m+k+1}{m+1}-\binom{m+k}{m+1}.$$
(2) En déduire, pour tous entiers $n,m\in\mathbb{N}^*$ la valeur de la somme
$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{m}.$$
(3) En déduire également la valeur de
$$P_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{p=1}^{m}(k+p)\right).$$

Exercice 4. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $A_1,A_2,...,A_n$ des évènements d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Montrer, par récurrence sur n (et à l'aide de la formule du crible) que
$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)\geq\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-(n-1).$$