Devoir Maison n°5 :

Solution

Exercice 1. Par la formule du binôme,

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{n^k}\times\binom{n}{k}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\exp\left(\frac{\ln(1+1/n)}{1/n}\right)$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+1/n)}{1/n}=\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1,$$

et par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{n^k}\times\binom{n}{k}\right)=\exp(1)=e.$$

Exercice 2. Commençons par traduire les informations du texte:

- À l'instant $n=0$, José regarde le *Télé-Achat*, ce qui veut dire que
$$a_0=1, b_0=0 \quad \text{et} \quad c_0=0.$$
- Si à l'instant n, il regarde l'un des trois programmes, il continue à le regarder à l'instant $n+1$ avec probabilité $2/3$ ou zappe vers l'un des deux autres programmes avec la même probabilité. En particulier, on traduit cela comme
$$P_{A_n}(A_{n+1})=P_{B_n}(B_{n+1})=P_{C_n}(C_{n+1})=\frac{2}{3}$$
et
$$P_{A_n}(B_{n+1})=P_{A_n}(C_{n+1})=P_{B_n}(A_{n+1})=P_{B_n}(C_{n+1})=P_{C_n}(A_{n+1})=P_{C_n}(B_{n+1})=\frac{1}{6}.$$

(1) Il est clair qu'au moment n, il regarde l'un des trois programmes mais ne peut pas en regarder deux simultanément, ainsi $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme un système complet d'évènements et par conséquent $a_n+b_n+c_n=1$.

(2) Par la formule des probabilités totales et les données du texte

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1})=P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n)+P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n)+P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n)\\ &= \frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{6}c_n \end{aligned}$$

(3) De manière totalement analogue,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= P(B_{n+1})=P_{A_n}(B_{n+1})P(A_n)+P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n)+P_{C_n}(B_{n+1})P(C_n)\\ &= \frac{1}{6}a_n+\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{6}c_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= P(C_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(C_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(C_{n+1})P(C_n) \\ &= \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{2}{3}c_n. \end{aligned}$$

(4) On voit alors, facilement d'après les relations précédentes, que

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n - (\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n) \\ &= \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}b_n \\ &= \frac{1}{2}(a_n - b_n) \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(a_n - b_n)$ est géométrique de raison $1/2$ et on peut écrire

$$a_n - b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - b_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

L'autre égalité se montre vraiment de la même manière, si bien qu'on omet le détail ici. Tout cela nous conduit à

$$a_n - c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - c_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(5) En récapitulant et à l'aide d'une résolution de système (dont a_n, b_n et c_n sont les inconnues) on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_n + b_n + c_n &=& 1 \\ a_n - b_n &=& \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ a_n - c_n &=& \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a_n &=& \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ b_n &=& \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ c_n &=& \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{array}\right.$$

Exercice 3.

(1) Soient m, k deux entiers. Par la formule du triangle de Pascal, on a bien

$$\binom{m+k}{m} = \binom{m+k+1}{m+1} - \binom{m+k}{m+1}.$$

(2) On va donc remplacer le terme dans la somme par la différence obtenue ci-dessus, découper en deux sommes, réindexer et faire apparaître une somme télescopique:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m} = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{m+k+1}{m+1} - \binom{m+k}{m+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k+1}{m+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{m+j}{m+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m+1} \\ &= \binom{m+n+1}{m+1} + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{m+j}{m+1} - \binom{m+j}{m+1} \right) - \binom{m}{m+1} \\ S_n &= \binom{m+n+1}{m+1}. \end{aligned}$$

(3) On commence par voir que

$$\prod_{p=1}^{m} (k+p) = \frac{(k+m)!}{k!} = m! \times \frac{(k+m)!}{k!m!} = m! \binom{k+m}{m}.$$

Par condéquent

$$\begin{aligned}
P_n &= \sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{p=1}^{m}(k+p)\right) = \sum_{k=0}^{n} m!\binom{k+m}{m} \\
&= m!\sum_{k=0}^{n}\binom{k+m}{m} = m!S_n \\
P_n &= m!\binom{m+n+1}{m+1}.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Pour $n=1$, la formule se vérifie immédiatement. Supposons alors qu'elle soit vraie pour un certain $n \geq 1$. Mais alors,

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n+1} = (A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) \cap A_{n+1},$$

et on applique la formule du crible (pour deux évènements)

$$\begin{aligned}
P\left((A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) \cap A_{n+1}\right) &= P\left(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n\right) + P(A_{n+1}) - P\left((A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) \cup A_{n+1}\right) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1) + P(A_{n+1}) - P\left((A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) \cup A_{n+1}\right) \quad \text{(HR)} \\
&\geq \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k) - n + 1 - P(A_{n+1}) - P\left((A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) \cup A_{n+1}\right) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k) - n,
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence. (On a utilisé le fait que

$$P\left((A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) \cup A_{n+1}\right) \leq 1$$

pour passer de l'avant dernière à la dernière ligne.)