Devoir Maison n°6 :

À rendre le 19 Décembre

Exercice 1. (Polynômes de Legendre)

(1) Soit $n \geq 1$ un entier. Quel est le degré du polynôme $P_n(X) = (X^2 - 1)^n$? Préciser quels sont les coefficients de ses monômes. En déduire une façon d'implémenter le polynôme P_n sous `SciLab`.

(2) On définit le $n-$ième polynôme L_n de Legendre comme dérivée $n-$ième du polynôme P_n, ce qu'on note $L_n = P_n^{(n)}$.
  (a) Quel est le degré de L_n?
  (b) Écrire une fonction `Legendre()` prenant pour argument un entier n et renvoyant le polynôme de Legendre L_n (On pourra réutiliser le code de la fonction `derivepoly()` du dernier TP.)
  (c) Préciser les 4 premiers polynômes de Legendre.

Exercice 2. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ci-dessous. L'objectif de l'exercice est d'écrire A_n en fonction de n, de deux manières différentes.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) **Polynôme annulateur et division euclidienne.**
  (a) Vérifier que $P(X) = X^2 + X - 2$ est un polynôme annulateur de A.
  (b) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.
  (c) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

(2) **Formule du binôme**.
  (a) On introduit la matrice N définie par

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Calculer N^2 et exprimer le résultat en fonction de N. En déduire, pour $n \geq 1$, l'expression de N^n.
  (b) Exprimer A en fonction de N et I_3.
  (c) À l'aide de la formule du binôme, montrer que

$$A^n = (-2)^n I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-2)^{n-k}\right) N.$$

  (d) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

(3) **Application.** On considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies pars

$$x_0 = 1, \qquad y_0 = 3, \qquad z_0 = 2$$

et

$$\begin{cases} x_{n+1} &=& -2x_n \\ y_{n+1} &=& 2x_n + y_n + 2z_n \\ z_{n+1} &=& -2z_n \end{cases}.$$

Déterminer l'expression du terme général de chacune des trois suites.