ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°6 :

Solution

Exercice 1. (Polynômes de Legendre) - SciLab

(1) Le degré du produit de deux polynômes étant égal à la somme des degrés des deux polynômes, on en déduit que le degré de P_n est égal à $2n$. Par la formule du binôme, on a

$$P_n(X) = (X^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^{2k}.$$

Ainsi, le polynôme P_n n'a que des monômes de degrés pairs. On peut donc "remplir" les coefficients du vecteur-ligne représentant le polynôme de deux en deux. On en déduit la suite d'instructions suivante (attention au décalage des indices)

```
function y = P(n)
        y=zeros(1, 2*n+1)
        for k=1:2:2*n+1
            y(k)=(-1)^(n-(k-1)/2)*prod(n-(k-1)/2+1:n)/prod(1:(k-1)/2);
        end
endfunction
```

(2) (a) Si on dérive n fois un polynôme de degré $2n$, le résultat est un polynôme de degré $2n-n=n$.

(b) On en déduit le programme suivant qui commence par calculer le polynôme P_n puis le dérive n fois consécutives (on rappelle le programme `derivepoly()` prenant en argument un polynôme et renvoyant le polynôme dérivé)

```
function y = derivepoly(P)
        n=length(P);
        y=zeros(1, n-1)
        for k=1:n-1
            y(k)=k*P(k+1);
        end
endfunction

function y = Legendre(n)
        y=P(n);
        for k=1:n
           y=derivepoly(y);
        end
endfunction
```

(c) Les quatre premiers polynômes sont

$$L_1(X) = 2X, \quad L_2(X) = -X + 12X^2, \quad L_3(X) = -72X + 120X^3, \quad L_4(X) = 144 - 1440X^2 + 1680X^4.$$

Exercice 2. . On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ci-dessous. L'objectif de l'exercice est d'écrire A_n en fonction de n, de deux manières différentes.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) **Polynôme annulateur et division euclidienne.**

(a) Pour vérifier que $P(X) = X^2X - 2$ est un polynôme annulateur de A, on calcule $P(A) = A^2 + A - 2I_3$ et on vérifie que le résultat est bien la matrice nulle.

$$\begin{aligned} P(A) &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Afin de déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P, on commence par factoriser P. On trouve immédiatement $P(X) = (X-1)(X+2)$. De plus, P étant de degré 2, le reste de la division euclidienne de X^n par P sera de degré inférieur ou égal à 1. Ainsi, on cherche a_n et b_n tels que

$$X^n = P(X)Q(X) + a_nX + b_n.$$

En injectant dans cette équation les racines de P (1 et -2), on trouve le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a_n & + & b_n & = & 1 \\ -2a_n & + & b_n & = & (-2)^n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a_n & = & \frac{1}{3}\left(1-(-2)^n\right) \\ b_n & = & \frac{1}{3}\left(2+(-2)^n\right) \end{array}\right. .$$

(c) On injecte alors A dans la division euclidienne de X^n par $P(X)$ (sachant que $P(A) = 0$), on obtient

$$\begin{aligned} A^n &= P(A)Q(A) + a_nA + b_nI_3 \\ &= \frac{1}{3}\left(1-(-2)^n\right)A + \frac{1}{3}\left(2+(-2)^n\right)I_3 \end{aligned}$$

et on retrouve bien

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3(-2)^n & 0 & 0 \\ 2+(-2)^{n+1} & 3 & 2+(-2)^{n+1} \\ 0 & 0 & 3(-2)^n \end{pmatrix}.$$

(2) **Formule du binôme**.

(a) Le calcul direct donne

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3N.$$

Une récurrence immédiate mène alors à $N^k = 3^{k-1}N$.

(b) On constate sans difficulté que $A = N - 2I_3$.

(c) Les matrices $-2I_3$ et N commutent (car les multiples de l'identité commutent avec toutes les matrices), on peut donc appliquer la formule du binôme (**il est indispensable de vérifier**

que les matrices commutent et de le mentionner avant de commencer le calcul)

$$\begin{aligned}
A^n &= (N-2I_3)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (-2I_3)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{n-k} N^k \\
&= (-2)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{n-k} 3^{k-1} N \\
&= (-2)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{n-k} 3^{k-1} \right) N \\
&= (-2)^n I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{n-k} 3^{k} \right) N,
\end{aligned}$$

qui est la formule attendue.

(d) On reconnait dans l'égalité précédente la formule du binôme (pour des nombres réels). En effet,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{n-k} 3^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{n-k} 3^k - (-2)^n = (-2+3)^n - (-2)^n = 1 - (-2)^n.$$

Il suit donc que

$$A^n = (-2)^n I_3 + \frac{1-(-2)^n}{3} N$$

ou encore

$$A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ \frac{2+(-2)^{n+1}}{3} & 1 & \frac{2+(-2)^{n+1}}{3} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

(3) **Application.** La méthode pour déterminer l'expression du terme général de chacune des trois suites est d'introduire les objets suivants

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les relations de récurrence définissant les suites susmentionnées permettent alors d'écrire la relation de récurrence $X_{n+1} = AX_n$, ce qui, par une récurrence immédiate mène à $X_n = A^n X_0$, ce qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ \frac{2+(-2)^{n+1}}{3} & 1 & \frac{2+(-2)^{n+1}}{3} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et donne finalement

$$x_n = (-2)^n; \qquad y_n = 5 + (-2)^{n+1}; \qquad z_n = 2(-2)^n.$$