ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°7 :

À rendre le 23 Janvier

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *nilpotente*, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

(1) Calculer $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + ... + A^{p-1})$.
(2) En déduire que $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

Exercice 2. On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{1}{\ln|x|}.$$

(1) Quel est l'ensemble de définition de g?
(2) Peut-on prolonger g par continuité?

Exercice 3. On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$.

(1) (a) Etudiez les variations de f, ainsi que ses limites aux bornes de l'intervalle de définition. Présentez ces résultats sous la forme d'un tableau de variation.
(b) Montrez que f induit une bijection, notée $\tilde{f}$ de $]0, 1/2[$ sur $]0, \sqrt{2/e}]$. Dressez le tableau de variations de l'application réciproque g de $\tilde{f}$.

(2) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2. Démontrez que l'équation

$$2\sqrt{x}e^{-x} = \frac{1}{n}$$

admet une unique solution dans $]0, 1/2[$, notée a_n.
(b) Montrez que la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
(c) En déduire que (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4. Dans cet exercice, on pourra utiliser que $2 < e < 3$.

(1) **Étude d'une fonction**
On considère l'application $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2e^x - 1$.
(a) Dresser le tableau de variations de ϕ, en précisant les limites en $\pm\infty$ et sa valeur en 0.
(b) Établir que l'équation $e^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$ admet une unique solution, notée α, et que $1/2 < \alpha < 1$.

(2) **Étude d'une suite**
On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3e^x$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
(a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
(b) Établir que la suite (u_n) est croissante.
(c) Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini? (*On pourra raisonner par l'absurde.*)