ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°7 :

Solution

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *nilpotente*, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

(1) Il suffit de développer

$$\begin{aligned}(I_n - A)\sum_{k=0}^{p-1} A^k &= \sum_{k=0}^{p-1} A^k - \sum_{k=0}^{p-1} A^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} A^k - \sum_{j=1}^{p} A^j \qquad \text{(changement indice } j = k+1) \\ &= A^0 - A^p \\ &= I_n \qquad \text{(car } A^p = 0).\end{aligned}$$

(2) Il suit que $I_n - A$ est inversible et $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + ... + A^{p-1}$.

Exercice 2. On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{1}{\ln|x|}.$$

(1) Par définition du log ainsi que par souci de non nullité du dénominateur, il est clair que $g(x)$ si et seulement si $|x| > 0$ et $|x| \neq 1$, c'est à dire si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; 0\}$.

(2) Il faut regarder les limites de $g(x)$ aux valeurs interdites:

- En 0: comme $|x| \to 0^+$ si $x \to 0$, alors $\ln|x| \to -\infty$ et
$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$
En posant $\tilde{g}(0) = 0$, la fonction $\tilde{g}$ prolonge donc, par continuité, g en 0.
- En 1: proche de 1, $\ln|x| = \ln(x)$ et
$$\lim_{x\to 1^{\pm}} g(x) = \pm\infty,$$
rendant impossible le prolongement en 1. C'est la même chose en -1.

En conclusion, on peut seulement prolonger g sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Exercice 3. On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$.

(1) (a) La fonction f est définie (continue et) dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions usuelles dérivables sur le même intervalle. Pour tout $x > 0$, on trouve

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{-x} + 2\sqrt{x} \times (-e^{-x}) = e^{-x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\right) = e^{-x}\left(\frac{1-2x}{\sqrt{x}}\right).$$

Il est alors facile de trouver le signe de cette expression et d'en déduire les variations (l'exponentielle étant toujours strictement positive, tout comme la racine au dénominateur). Avant de donner le tableau dans lequel on veut faire apparaître les limites aux bords de l'intervalle de définition, observons que, par algèbre des limites

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

(on pourrait donc prolonger f en 0 par continuité, ce n'est pas demandé ici) et, par croissance comparée

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}e^{-x} = 0.$$

Observons également que le maximum de f est atteint en $1/2$ et vaut

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2e}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}} = \sqrt{\frac{2}{e}}.$$

x	0		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{2}{e}}$	$\searrow$	0

(b) La fonction n'étant pas monotone sur tout son ensemble de définition, elle n'est pas bijective, mais si on se restreint à un plus petit intervalle, ce sera le cas. En effet, en considérant

$$\begin{array}{cccc} \tilde{f} &]0;1/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array},$$

l'étude précédente permet d'affirmer que $\tilde{f}$ est continue et strictement croissante. Par le théorème de bijection, elle réalise donc une bijection de $]0;1/2[$ sur

$$]\lim_{x\to 0^+} \tilde{f}(x); \lim_{x\to 1/2} \tilde{f}(x)[=]0;\sqrt{2/e}[.$$

Notant g sa bijection réciproque, le théorème précédent affirme également que le sens de variations de g est le même que celui de $\tilde{f}$

x	0		$\sqrt{2/e}$
g	0	$\nearrow$	$1/2$

(2) (a) Les solutions éventuelles de l'équation en question sont exactement les antécédents par $\tilde{f}$ de $1/n$. Or, pour tout $n \geq 1$, $1/n \in]0, \sqrt{2/e}[$ et $\tilde{f}$ étant bijective, il existe donc un unique antécédent de $1/n$ par $\tilde{f}$, que l'on note a_n par conséquent unique solution de l'équation dans $]0;1/2[$. En particulier, on a

$$\tilde{f}(a_n) = \frac{1}{n} \Longleftrightarrow a_n = g\left(\frac{1}{n}\right).$$

(b) Soit $n \geq 1$, il est clair que
$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}.$$
Par croissante de g sur $]0; \sqrt{2/e}[$, on a alors
$$a_{n+1} = g\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq g\left(\frac{1}{n}\right) = a_n$$
ou encore que (a_n) est décroissante.

(c) Tous les termes de la suite (a_n) sont éléments de l'intervalle $]0; 1/2[$ et sont donc minorés par 0. La suite est également décroissante; le théorème de convergence monotone affirme donc que la suite est convergente vers une limite ℓ qui vérifie (par passage à la limite dans les inégalités)
$$0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}.$$
De plus,
$$\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{n}\right).$$
Or, $\tilde{f}$ étant continue sur $]0; 1/2[$, le théorème de bijection affirme que g est continue sur $]0; \sqrt{2/e}[$. Comme $1/n \to 0$, $n \to +\infty$ et que $g(x) \to 0, x \to 0^+$, on a
$$\ell = \lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{u\to0^+} g(u) = 0.$$

Exercice 4. Dans cet exercice, on pourra utiliser que $2 < e < 3$.

(1) **Étude d'une fonction**

On considère l'application $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2e^x - 1.$

(a) La fonction ϕ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Les limites se trouvent sans difficulté; en $+\infty$, l'algèbre des limites donne
$$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty$$
et en $-\infty$, une croissance comparée donne
$$\lim_{x\to-\infty} \phi(x) = -1.$$
Par ailleurs, on calcule, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\phi'(x) = 2xe^x + x^2e^x = x(2+x)e^x$$
ce qui permet de dresser le tableau de variations ci-dessous (en ayant vu que $\phi(0) = -1$)

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
ϕ	-1	$\nearrow$	$4/e^2 - 1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

(b) L'équation $e^x = \dfrac{1}{x^2}$ est équivalente à $x^2e^x - 1 = 0$. Ses solutions sont donc les antécédents de -1 par ϕ sur $]0; +\infty[$. Or, ϕ étant continue et strictement croissante sur cet intervalle, le théorème de bijection affirme que tout élément de $]-1; +\infty[$ admet un unique antécédent dans $]0;+\infty[$ par ϕ. En particulier, 0 admet un unique antécédent dans $]0;+\infty[$ par ϕ, noté α. Comme $\phi(1/2) = \sqrt{e}/4 - 1 < 0$, que $\phi(1) = e - 1 > 0$ et que ϕ est croissante, on a

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

(2) **Étude d'une suite**

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3 e^x$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Une étude rapide de f, définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = (x^3 + 3x^2)e^x$ permet de voir que f est croissante sur $[0;+\infty[$. Comme $f(1) = e > 1$, on a en particulier, pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq f(1) > 1$. Une récurrence immédiate permet alors que voir que tous les termes de la suite sont bien supérieurs ou égaux à 1. En effet, c'est le cas pour $u_0 = 1$ et si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 1$, alors

$$u_{n+1} = f(u_n) \geq f(1) > 1,$$

et la récurrence est finie.

(b) Supposons que (u_n) soit majorée; par le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite : *ell* et le passage à la limite dans les inégalités permet de voir que $\ell \geq 1$. Mais, par continuité de f sur $[1;+\infty[$, le passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ implique que

$$\ell = f(\ell) \Longleftrightarrow \ell^3 e^\ell = \ell \Longleftrightarrow \ell^2 e^\ell = 1 \Longleftrightarrow \phi(\ell) = 0 \Longleftrightarrow \ell = \alpha$$

car on sait que $\ell \geq 1 > 0$. Mais, on sait aussi que $1/2 < \alpha < 1$, donc c'est absurde! Il suit que (u_n) n'est pas majorée, mais celle-ci, étant croissante ne peut que diverger vers $+\infty$, ou encore

$$\lim_{n \to +\infty} = +\infty.$$