ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison n°8

À rendre au plus tard le 22 Février

Exercice 1.

(1) (a) Montrer, par un argument de convexité, que, pour tout $x > 0$, on a $\ln(x) \leq x - 1$.
(b) Montrer alors la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n^n)}{n!}.$$

(2) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n^2+n-1}{n^2+n+1}\right)$ converge.

Exercice 2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-x} + 1$.

(1) Justifier que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puis montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J a préciser. Justifier que h^{-1} est dérivable sur J. En remarquant que $e^{-x} = h(x) - 1$, montrer que, pour tout $x \in J$,

$$\left(h^{-1}\right)'(x) = -\frac{1}{x-1}.$$

(2) Déterminer explicitement $h^{-1}(x)$ (pour $x \in J$) et retrouver le résultat de la question précédente.
(3) Montrer que $h([1;2]) \subset [1;2]$.
(4) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $h(\alpha) = \alpha$. Montrer de plus que $1 \leq \alpha \leq 2$.
(5) Montrer que, pour tout $x \in [1;2]$, $|h'(x)| \leq 1/e$.

On introduit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = h(u_n)$.

(6) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1;2]$.
(7) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

(8) En déduire que (u_n) converge vers α puis l'écriture d'un programme `SciLab` permettant d'obtenir une approximation de α à 10^{-4} près.

☞ **Tourner la page S.V.P**

Exercice 3. Soit p un paramètre, élément de $\left]\frac{1}{2};1\right[$. On pose, pour tout $x \in [0,1[$

$$f(x) = p\ln(1+x) + (1-p)\ln(1-x).$$

(1) **Étude de f.**

(a) Étudier les variations de f sur $]0,1[$, et montrer que f est concave.
Montrer que f admet un maximum sur $]0,1[$, atteint en un unique réel α_K que l'on exprimera en fonction de p.
(b) Déterminer la limite de f en 1.
(c) Montrer que f s'annule deux fois exactement sur $[0,1[$: en 0 et en un réel α_c vérifiant $\alpha_K < \alpha_c$.
(d) Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $[0,1[$.

☞ On considèrera dans ce qui suit que α_c, est une fonction de p (on écrira ainsi $\alpha_c(p)$).

(2) On définit la fonction φ sur $]0,1[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.
(a) Montrer que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0,1]$ On notera encore φ ce prolongement.
(b) Justifier que φ est dérivable sur $]0,1[$, et mettre l'expression de sa dérivée sous la forme

$$\varphi'(x) = \frac{h(x)}{(1-x^2)\left[\ln(1-x)\right]^2}.$$

(c) Déterminer les variations de h sur $]0,1[$.
(d) Montrer que φ réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle à préciser.

(3) Montrer que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 1$. On pourra utiliser le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction $\ln(1+u)$:

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

(4) (a) Établir que

$$\forall p \in \left]\frac{1}{2},1\right[, \quad \alpha_c(p) = \varphi^{-1}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

(b) En déduire que α_c, est prolongeable par continuité en $\frac{1}{2}$, que ce prolongement est dérivable en $\frac{1}{2}$ et que :

$$\alpha_c'\left(\frac{1}{2}\right) = 4.$$

(c) Montrer que

$$\lim_{p\to\frac{1}{2}} \frac{\alpha_c}{2\alpha_K} = 1.$$