ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°8

Solution

Exercice 1.

(1) (a) On sait que la fonction logarithme est concave sur son ensemble de définition (c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ dont la dérivée seconde est strictement négative); sa courbe est donc au dessous de toutes ses tangentes. Or $y = x - 1$ est la tangente en $x = 1$. Ainsi, on a bien $\ln(x) \leq x - 1$, pour tout $x > 0$.

(b) Il s'agit ici d'une série à terme positifs car $n^n \geq 1$ pour $n \geq 1$ donc $ln(n^n) \geq 0$. On a, par la remarque précédente, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{\ln(n^n)}{n!} = \frac{n\ln(n)}{n!} = \frac{\ln(n)}{(n-1)!} \leq \frac{n-1}{(n-1)!.}$$

Pour $n = 1$, le terme de droite est nul et pour $n \geq 2$, on a

$$\frac{n-1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!}.$$

Or, la série $\sum_{n\geq 2} 1/(n-2)!$ n'est rien d'autre que la série exponentielle et est donc convergente. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, on a bien la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n^n)}{n!}.$$

(2) On commence par constater que le terme général es négatif. En effet, comme $(n^2 + n - 1)/(n^2 + n + 1) \leq 1$, son log est négatif. On va donc montrer la convergence de la série opposée, celle de terme général

$$-\ln\left(\frac{n^2+n-1}{n^2+n+1}\right) = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right).$$

Mais, on remarque que

$$\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} = \frac{n^2+n-1+2}{n^2+n-1} = 1 + \frac{1}{n^2+n-1}.$$

Ensuite, on utilise l'inégalité ultra-classique par laquelle on a ouvert l'année $\ln(1+x) \leq x$ (qu'on obtient par exemple par un argument de concavité) pour écrire que , sachant aussi que $n - 1 \geq 0$

$$\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) \leq \frac{2}{n^2+n-1} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Or, $2/n^2$ est le double du terme général d'une série de Riemann convergente. Par comparaison des séries à termes positifs, on peut donc affirmer que la série de terme général celui opposé au notre converge et donc la notre aussi.

Exercice 2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-x} + 1$.

(1) La fonction h est la combinaison d'une exponentielle et d'une fonction constantes deux fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elle est donc bien $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ également. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a
$$h'(x) = -e^{-x} < 0$$
et h est strictement décroissante. Comme ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ valent respectivement $+\infty$ et 1, le théorème de bijection affirme qu'elle en réalise une de $\mathbb{R}$ sur $J =]1; +\infty[$. Comme de plus la dérivée de h ne s'annule jamais, on sait que h^{-1} est dérivable partout et, pour tout $x \in J$, on a
$$\left(h^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{h'\left(h^{-1}(x)\right)} = -\frac{1}{\exp\left(-h^{-1}(x)\right)}.$$
En remarquant que, par simple définition de h, $e^{-x} = h(x) - 1$, et donc on injecte ceci dans la formule ci-dessous pour obtenir
$$\left(h^{-1}\right)'(x) = -\frac{1}{\exp\left(-h^{-1}(x)\right)} = -\frac{1}{h\left(h^{-1}(x)\right) - 1} = \frac{1}{1-x}.$$

(2) Ici, on peut aussi trouver explicitement $h^{-1}(x)$ en résolvant l'équation. Plus précisément,
$$h(x) = y \Longleftrightarrow e^{-x} + 1 = y \Longleftrightarrow -x = \ln(y-1) \Longleftrightarrow x = -\ln(y-1)$$
ou encore
$$h^{-1}(y) = -\ln(y-1)$$
ce qui définit bien une fonction dérivable sur J et on a, pour $y \in J$,
$$\left(h^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{1-y},$$
et on retrouve le résultat précédent.

(3) Il est facile de voir le résultat voulu. On sait déjà que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (et *a fortiori* dans $[1; 2]$), $h(x) \geq 1$. Prenons alors $x \in [1; 2]$, par stricte décroissante de h, on sait que $h(x) \leq h(1) = 1/e + 1 \leq 2$ car $1/e \leq 1$. On a bien le résultat voulu.

(4) Pour répondre à cette question, il faut étudier la fonction $\varphi : x \mapsto h(x) - x$ et chercher les antécédents éventuels de 0. On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} + 1) < 0$ donc φ est strcitement décroissante.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	
φ	$+\infty$	0	$-\infty$

Par application du théorème de bijection, 0 admet un unique antécédent (dans $\mathbb{R}$) par φ. De plus,
$$\varphi(2) = \frac{1}{e^2} - 1 < 0 = \varphi(\alpha) < \frac{1}{e} = \varphi(1)$$
et la stricte décroissance de φ donne bien
$$1 \leq \alpha \leq 2.$$

(5) On a vu que $h'(x) = -e^{-x}$ et par conséquent $|h'(x)| = e^{-x}$, expression qui définit une fonction décroissante. Son maximum, sur $[1;2]$, est donc atteint à l'extrémité gauche, *i.e.* en $x = 1$ et on a bien, pour tout $x \in [1;2]$,

$$|h'(x)| \leq e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

On introduit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = h(u_n)$.

(6) C'est une récurrence immédiate et facile. Il est clair que $u_0 = 1 \in [1;2]$ (initialisation) et si $u_n \in [1;2]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, la stabilité de l'intervalle $[1;2]$ établie à la Question 3 permet de voir que $u_{n+1} = f(u_n)$ est encore dans $[1;2]$, ce qui termine la récurrence.

(7) La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;2]$, tous les termes de la suite ainsi que α sont des éléments du même intervalle, $|h'(x)| \leq (1/e)$ sur l'intervalle en question, ainsi, par l'inégalité des accroissements finis, on a

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|.$$

Par une récurrence immédiate, on en déduit que

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

En effet, pour $n = 0$, $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| \leq 1 = (1/e)^0$ car $\alpha \in [1;2]$. Le caractère héréditaire découle de l'inégalité précédente obtenue par les accroissements finis. Si, pour un certain $n \geq 0$, on a $|u_n - \alpha| \leq (1/e)^n$ alors,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e} \times \left(\frac{1}{e}\right)^n = \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}.$$

(8) Le théorème des gendarmes, car $(1/e)^n \to 0$, $n \to +\infty$, permet alors de conclure que (u_n) converge vers α. On en déduit le programme ultra classique suivant.

```
u=1;
n=0;
while (1/%e)^n >= 10^(-4)
    n=n+1;
    u=exp(-u)+1;
end
disp(u)
```

Exercice 3. (D'après **ESSEC 2008**) Soit p un paramètre, élément de $\left]\frac{1}{2};1\right[$. On pose, pour tout $x \in [0,1[$

$$f(x) = p\ln(1+x) + (1-p)\ln(1-x).$$

(1) **Étude de** f.

(a) Sur $]0;1[$, f est clairement de classe $\mathcal{C}^2$ (comme combinaison de logarithmes bien définis et eux-mêmes de classe $\mathcal{C}^2$) et

$$f'(x) = \frac{p}{1+x} - \frac{(1-p)}{1-x} = \frac{(1-x)p - (1-p)(1+x)}{1-x^2} = \frac{2p-1-x}{1-x^2}.$$

Avant de dresser, sans difficulté, le tableau de variations de f, on calcule sa dérivée seconde

$$f''(x) = \frac{x^2 - 1 + 2x(2p-1-x)}{(1-x^2)^2} = \frac{-x^2 + 2(2p-1)x - 1}{(1-x^2)^2}.$$

Or, le discriminant du numérateur vaut

$$\Delta = 4(2p-1)^2 - 4 = 4\left((2p-1+1)(2p-1-1)\right) = 8p(2p-2) = 16p(p-1) < 0$$

car $p < 1$. Donc le numérateur est de signe constant strictement négatif ainsi que la dérivée seconde ce qui caractérise une fonction concave. Concernant les variations de f, on dresse son tableau

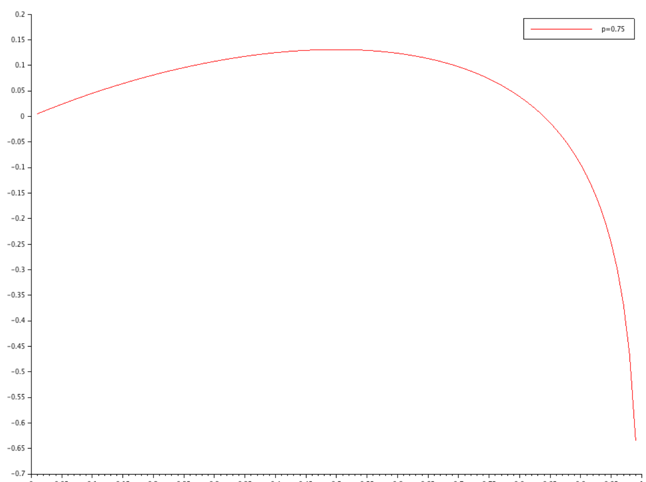
x	0		$2p-1$		1
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
f	0	$\nearrow$	$f(2p-1)$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$

En particulier, f admet un unique maximum sur $]0,1[$, atteint $\alpha_K = 2p-1$.

(b) Il est facile de trouver la limite de f en 1. En effet, $p\ln(1/x) \to p\ln(2)$ et $\ln(1-x) \to -\infty$, donc $f(x) \to -\infty$, $x \to 1$.

(c) Remarquant que $f(\alpha_K) = p\ln(1+2p-1) > 0$ car f est strictement croissante sur $[0;2p-1]$ et $f(0) = 0$, l'application du théorème de bijection sur $[2p-1;1[$ (où f est continue est strictement décroissante) permet de voir que 0 admet un unique antécédent α_c sur $]\alpha_K;1[$ ce qui répond à la question posée.

(d) On représente ci-dessous la courbe de f pour le choix de $p = 0.75$, obtenue avec `SciLab`.



☞ On considèrera dans ce qui suit que α, est une fonction de p (on écrira ainsi $\alpha_c(p)$).

(2) On définit la fonction φ sur $]0,1[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

(a) Il suffit de voir que la fonction φ a des limites finies aux deux extrémités. En 1, c'est clair, comme $\ln(1-x) \to -\infty$ et $\ln(1+x) \to \ln(2) > 0$, on a $\varphi(x) \to 0$, $x \to 1$. Donc φ se prolonge par continuité en 1 en posant $\varphi(1) = 0$. En 0, il faut utiliser une limite usuelle sur le log (ou un développement limite de $\ln(1 \pm u)$ en 0)

$$\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{x}{\ln(1-x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \times (-1) = -1,$$

et on peut prolonger φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = -1$.

(b) Sur $]0;1[$, la fonction φ est quotient de deux fonctions usuelles dérivables sont le dénominateur ne s'annule pas et est donc dérivable. On a

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \times \ln(1-x) - \ln(1+x) \times \frac{(-1)}{1-x}}{\ln(1-x)^2} = \frac{(1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)}{(1-x^2)\ln(1-x)^2}$$

et en posant $h(x) = (1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x)$, on a bien

$$\varphi'(x) = \frac{h(x)}{(1-x^2)\left[\ln(1-x)\right]^2}.$$

(c) Il est facile de voir que h (qui est bien dérivable sur $]0;1[$ comme combinaison de fonctions usuelles dérivables) vérifie

$$\begin{aligned} h'(x) &= \ln(1+x) + 1 - \ln(1-x) + 1 \\ &= 2 + \ln\left(\frac{1+x}{1-x)}\right) \\ &= 2 + \ln\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) > 0 \end{aligned}$$

donc h est strictement croissante sur $]0;1[$. Comme h est continue en 0 et que $h(0) = 0$, on en conclut que $h(x) > 0$ pour tout $x \in]0;1[$.

(d) D'après la question précédente, $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in]0;1[$ et, φ étant continue, le théorème de bijection affirme qu'elle en réalise une de $]0;1[$ sur $]\varphi(0);\varphi(1)[=]-1;0[$.

(3) On regarde la limite du taux d'accroissement:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} &= \frac{\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} + 1}{x} \\ &= \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x\ln(1-x)} \\ &= \frac{x - x^2/2 + o(x^2) - x - x^2/2 + o(x^2)}{x\left(-x + o(x^)\right)} \\ &= \frac{-x^2 + o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{-1 + o(1)}{-1 + o(1)} \\ &\longrightarrow 1,\ x \to 0. \end{aligned}$$

Ainsi, φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 1$.

(4) (a) Par définition, $\alpha_c(p)$ est l'unique antécédent de 0 (sur l'intervalle $]\alpha_K;1[$) par f, ou encore

$$\begin{aligned} f(\alpha_c(p)) = 0 &\iff p\ln(1+\alpha_c(p)) + (1-p)\ln(1-\alpha_c(p)) = 0 \\ &\iff p\frac{\ln(1+\alpha_c(p))}{\ln(1-\alpha_c(p))} = p - 1 \\ &\iff \varphi(\alpha_c(p)) = \frac{p-1}{p} = 1 - \frac{1}{p} \\ &\iff \alpha_c(p) = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{1}{p}\right). \end{aligned}$$

(b) Pour montrer que α_c est prolongeable par continuité en $1/2$, il faut montrer que la limite en $1/2$ est finie. Or, comme $1 - 1/p$ tend vers -1 lorsque p tend vers $1/2$ et que

$\varphi(x) \to -1$, $x \to 0$, on a que $\varphi^{-1}(y) \to 0$, $y \to -1$. Il suit que

$$\alpha_c(p) \underset{p\to 1/2}{\longrightarrow} 0$$

et α_c prolongeable par continuité en $1/2$ en posant $\alpha_c(1/2) = 0$.

De plus, φ^{-1} est dérivable en tout $y \in [-1; 0[$ vérifiant $y = \varphi(x)$ avec φ dérivable en x et $\varphi'(x) \neq 0$. Or, φ est dérivable, avec une dérivée strictement positive, pour tout $x \in [0; 1[$. Il suit que φ^{-1} est dérivable en -1 avec

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(-1) = \frac{1}{\varphi'(0)} = 1.$$

De plus $p \mapsto 1 - 1/p$ dérivable sur $[1/2; 1[$ et $1 - 1/p \in [-1; 0[$. Par composition, α_c est dérivable sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right[$ et

$$\alpha_c'(p) = \frac{1}{p^2}\left(\varphi^{-1}\right)'\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

En particulier, pour $p = 1/2$,

$$\alpha_c'\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\varphi^{-1}\right)'(-1) = 4.$$

(c) En revenant à la définition de nombre dérivée comme limite du taux d'accroissement, on a

$$\lim_{p\to 1/2} \frac{\alpha_c(p) - \alpha_c(1/2)}{p - 1/2} = \alpha_c'(1/2) = 4 \iff \lim_{p\to 1/2} \frac{\alpha_c(p)}{2p - 1} = 2.$$

Mais, on sait que $\alpha_K = 2p - 1$, donc on a bien

$$\lim_{p\to 1/2} \frac{\alpha_c}{2\alpha_K} = 1.$$