ECE 2 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison

Saint Valentin 2018 ♡

Exercice 1

Jean-Michel Charcuterie vend des saucissons sur le marché, le samedi matin. Il propose au choix deux type de friandises, le saucisson au poivre (que l'on notera A) et le saucisson aux truffes (noté B) et il dispose d'un stock de 40 exemplaires de A et 40 exemplaires de B. Chaque client demande soit A, soit B avec la probabilité $0,5$. Les demandes des clients sont indépendantes les unes des autres. Un samedi, 60 clients se présentent. On note x la probabilité de l'événement "Jean-Mi ne satisfait pas à toutes les demandes, cette matinée".

(1) Déterminer la loi de Y, nombre de clients demandant le poivre dans la matinée.
(2) Exprimer x à l'aide de Y .
(3) Déduire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev un majorant de x.
(4) En approchant la loi de Y par une loi normale, exprimer x à l'aide de la fonction de répartition Φ puis utiliser la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ pour donner une valeur approchée de x.

Exercice 2

On considère la matrice carrée réelle d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et on note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est A, dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

(1) Déterminer le noyau et l'image de φ. En déduire que 0 est valeur propre de φ.

(2) (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
(b) Vérifier que 4 et 6 sont deux valeurs propres de φ et déterminer les sous espaces propres associés.
(c) On introduit les vecteurs

$$u_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3, \quad u_2 = e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad u_3 = e_1 - e_2 + e_3.$$

Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice A' de φ dans cette base.

(3) Soient α, β et γ trois nombres réels non nuls et P la matrice définie par : $P = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ 2\alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

  (a) Montrer en utilisant la question précédente que P est inversible.
  (b) On rapelle que pour toute matrice $A = (a_{i,j})$, on appelle transposée de A, la matrice notée ${}^tA$ défnie par ${}^tA = (a_{j,i})$, c'est à dire obtenue en permutant les lignes et les colonnes de A. Calculer le produit $P \cdot {}^tP$ et en déduire l'existence de valeurs de α, β et γ telles que ${}^tP = P^{-1}$. On se placera dans cette situation dans la suite de l'exercice.
  (c) Justifier que $A = P \cdot A' \cdot {}^t P$.

Soient x, y et z trois réels, on définit les matrices colonnes et lignes respectives

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad {}^tX = (x, y, z)$$

et on pose

$$g(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 4xz - 4yz + 2z^2.$$

(4) (a) Montrer que : ${}^tX \cdot A \cdot X = g(x, y, z)$
  (b) Montrer que la transposée de la matrice $({}^tP \cdot X)$ est $({}^tX \cdot P)$.
  (c) En déduire que

$$g(x, y, z) = 4y'^2 + 6z'^2, \qquad \text{où on a posé} \quad {}^tP.X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

(5) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = g(x, y, y^2), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

  (a) Expliciter $f(x, y)$ et justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
  (b) Déterminer les points critiques de f.
  (c) Former la matrice hessienne en chacun des points critiques précédents. Que peut-on conclure quant à la nature de ces points critiques?
  (d) Montrer en utilisant la question **(4)(c)** que $(0, 0)$ est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
  (e) Compléter le programme `SciLab` permettant d'obtenir la représentation graphique de f sur $[-4; 4]^2$, que l'on pourra contempler avec admiration.

```
function z=f(x,y)
    z=...................
endfunction


x=...................
y=...................
z=feval(x,y, f)

plot3d(................)
```

Problème

Partie 1. Résultats préliminaires

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

(1) Montrer qu'il existe $M>0$ tel que, pour tous $x,y\in[0;1]$,

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|.$$

(2) En déduire que, pour tout entier $n\geq 1$, pour tout entier $k\in[\![0;n-1]\!]$, et pour tout réel $t\in\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$,

$$\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq M\left(t-\frac{k}{n}\right).$$

(3) En intégrant l'inégalité précédente, montrer que, pour tout entier $n\geq 1$, pour tout entier $k\in[\![0;n-1]\!]$,

$$\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{M}{2n^2}.$$

(4) En déduire que, pour tout entier $n\geq 1$,

$$\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{M}{2n}$$

puis que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

(5) **Application.** Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right).$$

(6) Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose

$$I\left(p,q\right)=\int_0^1 x^p\left(1-x\right)^q\mathrm{d}x.$$

(a) Montrer que , pour tout couple $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$$I\left(p,q\right)=\frac{q}{p+1}I\left(p+1,q-1\right).$$

(b) En déduire que, pour tout couple $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$$I\left(p,q\right)=\frac{p!q!}{(p+q)!}I\left(p+q,0\right).$$

(c) Déterminer$I\left(p+q,0\right)$ et montrer finalement que

$$I\left(p,q\right)=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Partie 2. Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère un paramètre entier $m \geq 2$ et une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ (où $p \in [0;1]$).

(1) Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de Y, puis à l'aide de la formule de Huygens-Kœnig, montrer que
$$E(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2.$$

(2) On considère maintenant une première suite de variables aléatoires (U_n) telle que, pour tout $n \geq 1$, U_n suit une loi uniforme sur $\left\{0; \frac{1}{n}; ...; \frac{n-1}{n}\right\}$, c'est à dire que, pour tout $l \in [\![0; n-1]\!]$,
$$P\left(U_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n},$$
et une seconde suite de variables aléatoires (X_n) définie conditionnellement:
$$\text{Sachant que } \left(U_n = \frac{k}{n}\right), \quad X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right).$$

(a) Donner la loi de X_1.

(b) Soit $n \geq 2$. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que, pour tout $i \in [\![0; m]\!]$,
$$P(X_n = i) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

(3) Utiliser la première question pour donner, sans calcul supplémentaire, la valeur de la somme
$$\sum_{i=0}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

(4) En déduire alors que
$$E(X_n) = \frac{m(n-1)}{2n}.$$

(5) En utilisant à nouveau la première question, donner sans calcul la valeur de la somme
$$\sum_{i=0}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

(6) En déduire que
$$E(X_n(X_n-1)) = \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$
puis que
$$V(X_n) = \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}.$$

(7) (a) En utilisant les résultats obtenus aux deux premières questions de la première partie, calculer, pour tout $i \in X_n(\Omega)$,
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(X_n = i\right).$$

(b) En déduire que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

(c) Vérifier que
$$\lim_{n\to+\infty} E\left(X_n\right) = E\left(X\right), \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} V(X_n) = V(X).$$