Devoir Maison

Solution sans Valentin ♡

Exercice 1

Jean-Michel Charcuterie vend des saucissons sur le marché, le samedi matin. Il propose au choix deux type de friandises, le saucisson au poivre (que l'on notera A) et le saucisson aux truffes (noté B) et il dispose d'un stock de 40 exemplaires de A et 40 exemplaires de B. Chaque client demande soit A, soit B avec la probabilité $0,5$. Les demandes des clients sont indépendantes les unes des autres. Un samedi, 60 clients se présentent. On note x la probabilité de l'événement "Jean-Mi ne satisfait pas à toutes les demandes, cette matinée".

(1) D'après les données du texte, il est clair que Y suit une loi binomiale $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(60, 0.5)$.

(2) Jean-Mi est pris de court si le nombre de demandes en saucisson au poivre dépasse 40 (*i.e.* si $Y > 40$) ou si celui de saucissons aux truffes dépasse également le stock de 40, c'est à dire si le reste des demandes $(60 - Y)$ dépasse 40. Ainsi,

$$x = P((Y > 40) \cup (60 - Y) > 40) = P(Y > 40) + P(Y < 20).$$

(3) Sachant que $E(Y) = 60 \times 0.5 = 30$ et que $V(Y) = 60 \times 0.5 \times 0.5 = 15$, l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev donne

$$\begin{aligned} x &= P(Y > 40) + P(Y < 20) = P(Y - 30 > 10) + P(Y - 30 < -10) \\ &= P(|Y - 30| > 10) \\ &\leq \frac{V(Y)}{10^2} = \frac{15}{100}. \end{aligned}$$

(4) Par le théorème central limite, on sait qu'on peut approcher Y par la loi normale $\mathcal{N}(30, 15)$ ou, de manière équivalente, approcher Y^* par la loi normale centrée réduite. Mais alors,

$$\begin{aligned} x &= P(|Y - 30| > 10) = 1 - P(|Y - 30| \leq 10) \\ &= 1 - P\left(\left|\frac{Y - 30}{\sqrt{15}}\right| \leq \frac{10}{\sqrt{15}}\right) \\ &\sim 2 - 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{15}}\right) = 0.0098 < 1\%. \end{aligned}$$

Exercice 2

On considère la matrice carrée réelle d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et on note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est A, dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

(1)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(\varphi) & \iff \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ & \iff \begin{cases} 4x + 2z & = & 0 \\ 4y - 2z & = & 0 \\ 2x - 2y + 2z & = & 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} z & = & 2x \\ y & = & -x \\ 0 & = & 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc

$$\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Comme $\ker(\varphi) \neq \{0\}$ alors 0 est valeur propre de φ. De plus, comme $\dim(\ker(\varphi)) = 1$, le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 3 - 1 = 2$. Remarquant que $\varphi(e_1) = (4, 0, 2)$ et $\varphi(e_2) = (0, 4, -2)$ forment une famille libre de 2 vecteurs, elles forment donc une base de l'image et on peut écrire

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

(2) (a) Comme A est symétrique, elle A est diagonalisable.

(b) On résout :

$$(A - 4I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 2z & = & 0 \\ -2z & = & 0 \\ 2x - 2y - 2z & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z & = & 0 \\ x & = & y \end{cases}.$$

Donc 4 est valeur propre de φ et son sous espace propre associé est $E_4 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$$(A - 6I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x + 2z & = & 0 \\ -2y - 2z & = & 0 \\ 2x - 2y - 4z & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & z \\ y & = & -z \end{cases}.$$

Donc 6 est valeur propre de φ et son sous espace propre associé est $E_6 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(c) On a $u_1 = -(1, -1, 2) \in \ker(\varphi) = E_0$. $b' = (u_1, u_2, u_3)$ est une famille de vecteur propres associés à des valeurs propres distinctes donc une famille libre (par concaténation des sous-espaces propres) de 3 vecteurs ; et donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme $\varphi(e_1) = 0 : \varphi(e_2) = 4e_2 : \varphi(e_3) = 6e_3$ alors la matrice de φ dans cette base est

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(3) Soient α, β et γ trois nombres réels non nuls et P la matrice définie par : $P = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ 2\alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix}$

(a) Les colonnes de P sont des vecteurs propres (non nuls) des trois sous-espaces propres différents et forment donc une base de $\mathbb{R}^3$. Donc P est inversible.

(b) On remonte ses manches et on calcule

$$\begin{aligned} P \cdot {}^tP &= \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ 2\alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 2\alpha \\ \beta & \beta & 0 \\ \gamma & -\gamma & \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & -\alpha^2+\beta^2-\gamma^2 & -2\alpha^2+\gamma^2 \\ -\alpha^2+\beta^2-\gamma^2 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & 2\alpha^2-\gamma^2 \\ -2\alpha^2+\gamma^2 & 2\alpha^2-\gamma^2 & 4\alpha^2+\gamma^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P \cdot {}^tP = I &\iff \begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1 & L_1 \\ -\alpha^2+\beta^2-\gamma^2 = 0 & L_1+L_2 \\ -2\alpha^2+\gamma^2 = 0 & L_3 \\ 4\alpha^2+\gamma^2 = 1 & L_4-L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1 \\ 2\beta^2 = 1 \\ -2\alpha^2+\gamma^2 = 0 \\ 6\alpha^2 = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1 \\ \beta = \pm 1/\sqrt{2} \\ \gamma = \pm 1/\sqrt{3} \\ \alpha = \pm 1/\sqrt{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ la première équation est alors vérifiée. Donc en prenant $\alpha = 1/\sqrt{6}$: $\beta = 1/\sqrt{2}$ et $\gamma = 1/\sqrt{3}$ on a $P \cdot {}^tP = I$ donc ${}^tP$ est l'inverse de P.

(c) A' est la matrice de φ dans $\mathcal{B}'$ donc d'après la formule de changement de base, avec P la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ on a $A = P \cdot A' \cdot P^{-1} = P \cdot A' \cdot {}^tP$

Soient x, y et z trois réels, on définit les matrices colonnes et lignes respectives

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad {}^tX = (x, y, z)$$

et on pose

$$g(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 4xz - 4yz + 2z^2.$$

(4) (a) On calcule

$$\begin{aligned}
{}^tX\cdot A\cdot X &= {}^tX\begin{pmatrix}4&0&2\\0&4&-2\\2&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4x+2z\\4y-2z\\2x-2y+2z\end{pmatrix}\\
&= 4x^2+4xz+4y^2-4yz+2z^2\\
&= g(x,y,z).
\end{aligned}$$

(b) On vérifie

$${}^tP\cdot X=\begin{pmatrix}-\alpha&\alpha&2\alpha\\\beta&\beta&0\\\gamma&-\gamma&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha x+\alpha y+2\alpha z\\\beta x+\beta y\\\gamma x-\gamma y+\gamma z\end{pmatrix}$$

et, d'autre part,

$${}^tX\cdot P=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\alpha&\beta&\gamma\\\alpha&\beta&-\gamma\\2\alpha&0&\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha x+\alpha y+2\alpha z&\beta x+\beta y&\gamma x-\gamma y+\gamma z\end{pmatrix}.$$

Donc elles sont transposées l'une de l'autre. On a alors

$$\begin{aligned}
{}^tX\cdot A\cdot X &= {}^tX\cdot P\cdot A'\cdot{}^tP\cdot X\\
&= \left({}^tX\,P\right)A'\left({}^tP\,X\right)\\
&= \begin{pmatrix}x'&y'&z'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\\
&= 4y'^2+6z'^2,
\end{aligned}$$

donc $g(x,y,z)=4y'^2+6z'^2$.

(5) On considère la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=g(x,y,y^2),\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

(a) Par définition

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= g(x,y,y^2)=4x^2+4x\cdot y^2+4y^2-4y\cdot y^2+2(y^2)^2\\
&= 4x^2+4xy^2+4y^2-4y^3+2y^4.
\end{aligned}$$

On constate que f est polynomiale et est donc $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Pour déterminer les points critiques de f, il faut voir où le gradient s'annule et commencer par déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f:

$$\partial_1 f(x,y) = 8x+4y^2$$

$$\partial_2 f(x,y) = 8xy+8y-12y^2+8y^3$$

Il suit que

$$\nabla f(x,y)=0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 8x+4y^2 &=& 0\\ 8xy+8y-12y^2+8y^3 &=& 0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 8x &=& -4y^2\\ y(8x+8-12y+8y^2) &=& 0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} 8x &=& -4y^2 & (L_1)\\ 4y(2-3y+y^2) &=& 0 & (L_2)\end{array}\right.$$

Or,

$$(L_2) \iff (y=0 \quad \text{ou} \quad y=1 \quad \text{ou} \quad y=2)$$

En remplaçant dans (L_1) on trouve donc trois points critiques

$$(0,0), \qquad \left(-\frac{1}{2},1\right), \qquad (-2,2).$$

(c) Pour former la matrice hessienne en chacun des points critiques précédents, il faut commencer par calculer les dérivées partielles d'ordre 2

$$\begin{array}{rcl} \partial^2_{1,1}f(x,y) &=& 8\\ \\ \partial^2_{1,2}f(x,y) &=& \partial^2_{2,1}f(x,y)=8y\\ \\ \partial^2_{2,2}f(x,y) &=& 8x+8-24y+24y^2\end{array}$$

Il suit que

$$H_1=\nabla^2 f(0,0)=\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}$$

Cette matrice étant diagonale, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux qui sont tous deux strictement positifs; on peut conclure en la présence d'un minimum local en $(0,0)$.

$$H_2=\nabla^2 f(-2,2)=\begin{pmatrix}8&16\\16&40\end{pmatrix}$$

On peut alors voir (relativement long et un peu fastidieux) que cette matrice admet pour valeurs propres $24\pm16\sqrt{2}$ qui sont toutes deux strictement positives (on cherche les racines du déterminant de $H_2-\lambda I_2$) donc on peut encore conclure en la présence d'un minimum local en $(-2,2)$. Enfin,

$$H_3=\nabla^2 f\left(-\frac{1}{2},1\right)=\begin{pmatrix}8&8\\8&4\end{pmatrix}$$

a pour valeurs propres les racines de $(8-\lambda)(4-\lambda)-64=0$ qui sont $\lambda=6\pm2\sqrt{17}$ dont l'une est strictement positive et l'autre strictement négative. Ainsi, f présente un point selle en $(-1/2;1)$.

(d) Comme $g(x,y,z)=4y'^2+6z'^2\geq 0$ et que $f(0,0)=0$, il suit que $f(x,y)\geq f(0,0)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et f présente donc un minimum global en $(0,0)$.

(e) On complète

```
function z=f(x,y)
    z=4*x^2 +4*x*y^2+4*y^2-4*y^3+2*y^4
endfunction
x=-4:.1:4;
y=x;
z=feval(x,y, f); plot3d(x,y,z)
```

Problème

Partie 1. Résultats préliminaires

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

(1) Par hypothèse f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, en particulier sa dérivée f' est continue sur $[0;1]$ (intervalle fermé borné) et y est donc bornée en atteignant ses bordes; il existe donc $M > 00$ tel que $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in [0;1]$. En appliquant ensuite l'inégalité des accroissements finis, on obtient bien, pour $x, y \in [0;1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

(2) Il suffit d'appliquer l'inégalité précédente avec $x = t$ et $y = k/n$ qui sont bien des éléments de $[0;1]$. Comme $t \geq k/n$ on a bien

$$\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right).$$

(3) Par les propriétés de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}t \\
&\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} M\left(t - \frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t \\
&= M\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(t - \frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t = M\left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2\right]_{k/n}^{(k+1)/n} \\
&= \frac{M}{2n^2}.
\end{aligned}$$

(4) En sommant l'inégalité obtenue à la question précédente et avec l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

par la relation de Chasles et on a bien l'inégalité demandée. Comme $M/(2n) \longrightarrow 0$, $n \to +\infty$, le théorème des gendarmes assure que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

(5) **Application.** Il suffit d'écrire les quantités suivantes sous la forme précédente. Plus précisément,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}} &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right) &= n\left(\frac{1}{n^2(1+1/n)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2(1+n/n)^2}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(6) Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose

$$I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \,\mathrm{d}x.$$

(a) C'est une intégration par parties. Les deux fonctions sous l'intégrale étant $\mathcal{C}^1$ sur $[0;.1]$, elle est parfaitement légale et on a

$$\begin{aligned} I(p,q) &= \int_0^1 x^p (1-x)^q \,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^q\right] + \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-q)^{q-1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{q}{p+1}I(p+1,q-1).\end{aligned}$$

(b) . On montre, par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la formule est vraie:

- initialisation: pour $q = 0$, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I(p,0) = \frac{p!0!}{(p+0)!}I(p+0,0)$$

car $0! = 1$.

- hérédité: supposons que, pour un certain $q \in \mathbb{N}$, on ait la formule vérifiée pour tout $p \in \mathbb{N}$. (HR). Alors;

$$\begin{aligned} I(p,q+1) &= \frac{q+1}{p+1}I(p+1,q+1-1) = \frac{q+1}{p+1}I(p+1,q) \\ &= \frac{q+1}{p+1}\frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!}I(p+q+1,0) \qquad \text{(par HR)} \\ &= \frac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!}I(p+q+1,0),\end{aligned}$$

ce qui termine bien la récurrence.

(c) Le calcul est facile

$$I(p+q,0)=\int_0^1 x^{p+q}\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{p+q+1}}{(p+q+1)}\right]_0^1=\frac{1}{p+q+1}$$

et il découle de la question précédente que

$$I\left(p,q\right)=\frac{p!q!}{(p+q)!}\times\frac{1}{p+q+1}=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Partie 2. Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère un paramètre entier $m\geq 2$ et une variable aléatoire $Y\hookrightarrow\mathcal{B}(m,p)$ (où $p\in[0;1]$).

(1) Si $Y\hookrightarrow\mathcal{B}(m,p)$, alors $E(Y)=mp$ et $V(Y)=mp(1-p)$. De plus, on a

$$\begin{aligned}E(Y(Y-1)) &= E(Y^2-Y)\\ &= E(Y^2)-E(Y)\\ &= E(Y^2)-E(Y)^2+E(Y)^2-E(Y)\\ &= V(Y)+E(Y)^2-E(Y)\\ &= mp(1-p)+m^2p^2-mp\\ &= m(m-1)p^2,\end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité attendue.

(2) (a) Par définition

$$P(X_1=0)=P(X_1=0|U_1=0)P(U_1=0)=1,$$

et X_1 vaut presque sûrement 0.

(b) D'après la formule des probabilités totales, la famille $\{(U_n=k/n)\}_{0\leq k\leq n-1}$ formant un s.c.e,

$$\begin{aligned}P(X_n=i) &= \sum_{k=0}^{n-1}P\left(X_n=i|U_n=\frac{k}{n}\right)P\left(U_n=\frac{k}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}\\ &= \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i},\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(3) Si $Y\hookrightarrow\mathcal{B}\left(m,\frac{k}{n}\right)$, alors, par définition de l'espérance et grâce au rappel de la Question (1)

$$\sum_{i=0}^{m}i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}=E(Y)=\frac{mk}{n}.$$

(4) On en déduit que

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \sum_{i=0}^{m} iP(X_n = i) \\
&= \sum_{i=0}^{m} i \left(\frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m} i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right) \left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{mk}{n} \\
&= \frac{m}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k \\
&= \frac{m}{n^2} \times \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{m(n-1)}{2n},
\end{aligned}$$

ce qui était demandé.

(5) Par le théorème de transfert (et la Question (1)), si $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$, alors

$$\sum_{i=0}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} = E(Y(Y-1)) = m(m-1)\left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

(6) Il suit que, toujours par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
E(X_n(X_n-1)) &= \sum_{i=0}^{m} i(i-1)P(X_n = i) \\
&= \sum_{i=0}^{m} i(i-1) \left(\frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m} i(i-1) \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m(m-1)k^2}{n^2} \\
&= \frac{m(m-1)}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\
&= \frac{m(m-1)}{n^3} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2},
\end{aligned}$$

puis que

$$\begin{aligned}
V(X_n) &= E(X_n(X_n-1)) - E(X_n)^2 + E(X_n) \\
&= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2} - \left(\frac{m(n-1)}{2n}\right)^2 + \frac{m(n-1)}{2n} \\
&= \frac{2m(m-1)(n-1)(2n-1) - 3m^2(n-1)^2 + 6mn(n-1)}{12n^2} \\
&= \frac{m(n-1)\left(2(2n-1)(m-1) - 3m + 6n\right)}{12n^2} \\
&= \frac{m(n-1)(mn+m+2n+2)}{12n^2} \\
&= \frac{m(n-1)(n+1)(m+2)}{12n^2} \\
&= \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2},
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(7) (a) En posant, pour $i \in [\![0; m]\!]$, $f_i(x) = x^i(1-x)^{m-i}$, qui définit bien une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (car polynomiale) sur $[0; 1]$, les résultats de la partie préliminaire permettent de voir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} = \int_0^1 f_i(x)\mathrm{d}x = I(i, m-i) = \frac{i!(m-i)!}{(m+1)!}.$$

En particulier, on obtient donc que

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = i) = \binom{m}{i} \frac{i!(m-i)!}{(m+1)!} = \frac{m!}{(m+1)!} = \frac{1}{m+1}.$$

(b) Il découle de la question précédente que X_n converge en loi vers la loi uniforme sur $[\![0; m]\!]$, c'est à dire $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, avec $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0; m]\!])$.

(c) On sait, d'après le cours, que

$$E(X) = \frac{m}{2}, \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(m+1)^2 - 1}{12} = \frac{m^2 + 2m}{12} = \frac{m(m+2)}{12}.$$

Comme $(n-1)/n \to 1$, $n \to +\infty$, et $(n^2-1)/n^2 \to 1$, $n \to +\infty$, on a bien $E(X_n) \to E(X)$ et $V(X_n) \to V(X)$.