ECE 2 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison

Noël 2017

Problème 1. Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes:

(Δ_1) **:** les coefficients diagonaux $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M;
(Δ_2) **:** la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

(1) Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathcal{D}_n$.

(2) Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $M + \alpha I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.

(3) On note K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

   (a) Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.
   (b) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous espace-vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

(4) (a) Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} \text{ inversible}\right) \iff (x \neq 0 \text{ et } y \neq 0)$$

   (b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(5) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$. Cette matrice est-elle diagonalisable?

(6) Pour tout t réel, on considère la matrice

$$M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t. En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.
(b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

(1) Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que 0 est une valeur propre de M et que c'est la seule valeur propre de M.

(2) Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle. Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.

Notons $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

(a) Montrer les inclusions $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ et $\ker(u^2) \subset \ker(u^3)$.
(b) Montrer que les noyaux $\ker(u^2)$ et $\ker(u^3)$ ne peuvent pas être égaux. Pour cela, montrer que dans le cas contraire, le noyau de u^2 est égal à celui de u^i pour tout entier i supérieur ou égal à 2, et en tirer une contradiction.
(c) Montrer que les noyaux $\ker(u)$ et $\ker(u^2)$ ne peuvent pas être égaux non plus.
(d) Conclure en considérant la dimension des noyaux mentionnés ci-dessus.

(3) Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$$

On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

(a) Établir l'égalité $M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)I_3$.
(b) Montrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls.
(c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1. Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.
(d) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.
(e) Exhiber une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.

Problème 2.

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

(1) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$\forall x \in [0;1], \quad h(x) = \frac{x}{2-x}.$$

(a) Montrer que h est une bijection de $[0;1]$ sur $[0;1]$ et, pour tout $y \in [0;1]$, exprimer $h^{-1}(y)$.
(b) Déterminer deux réels α et β vérifiant : $\forall x \in [0;1], \quad h(x) = \alpha + \frac{\beta}{2-x}$.

(c) Calculer

$$\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.

(a) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.
(b) Pour tout réel y de $[0;1]$ déterminer la probabilité de l'événement $\left(\frac{X}{2-X} \leq y\right)$.
(c) Montrer que la variable aléatoire $Y = \frac{X}{2-X}$ admet une densité et déterminer une densité de Y.
(d) Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$ et déterminer.

Partie II : Étude d'un temps d'attente

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note $I_1,\ I_2 \cdots, I_n$.

Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on modélise l'instant d'arrivée de l'invité I_k par une variable aléatoire T_k de loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$. On suppose de plus que, pour tout réel t, les n événements $(T_1 \leq t)$, $(T_2 \leq t)$, $\cdots (T_n \leq t)$, sont indépendants.

(1) Soit un réel t appartenant à $[0;1]$. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $(T_k \leq t)$ est réalisé et la valeur 0 sinon.

On note $S_t = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$.

(a) Que modélise la variable aléatoire S_t ?
(b) Déterminer la loi de la variable aléatoire S_t.

(2) Soit R_1 la variable aléatoire égale à l'instant de la première arrivée.
(a) Soit un réel t appartenant à $[0;1]$. Comparer l'événement $(R_1 > t)$ et l'événement $(S_t = 0)$
(b) Montrer que la variable aléatoire R_1 admet une densité et en déterminer une.

(3) Soit R_2 la variable aléatoire égale à l'instant de la deuxième arrivée.
Montrer que la variable aléatoire R_2 admet une densité et en déterminer une.

Exercice

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite d'intégrales

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)}.$$

(1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, I_n est une intégrale convergente.

(2) (a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;-1\}$,

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x-1}.$$

(b) En déduire la valeur de I_1.

(3) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$
(b) En déduire la limite de la suite (I_n).

(4) (a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + I_{n+1}$.
(b) Montrer que (I_n) est décroissante.
(c) Donner alors un équivalent, en $+\infty$, de I_n puis donner la nature de la série $\sum I_n$.

(5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)^2}$.
(a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.
(b) Calculer J_0.

(6) (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.
(b) Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k$$
en fonction de J_n.
(c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$,
$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{4(n-1)}$$
et en déduire la limite de J_n.
(d) En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ est convergente et calculer sa somme.

(7) Compléter les commandes `SciLab` ci-dessous afin qu'elles calculent et affichent les valeurs de I_n et J_n pour un entier $n \geq 2$ entré par l'utilisateur.

```
n=input('n=?');
I=log(2); J=1/2;
J=..................
for k=2:n
    I=..............
    J=..............
end
disp(I, 'I_n=')
disp(J, 'J_n=')
```

Exercice sous `SciLab`

On rappelle que la commande `grand(1, N, 'exp', lam)` permet de générer un échantillon de taille N dont les composantes représentent des réalisations de variables aléatoires indépendantes de même loi normale $\mathcal{E}$(`lam`).

On considère une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et la variable $y = \lfloor X \rfloor$.

(1) Recopier, compléter et exécuter les commandes

```
X=grand(1, 1000, 'exp', 0, 1);
Y=................................;
```

(2) Donner une valeur approchée de l'espérance `m` et de la variance de Y.

(3) Compléter les lignes suivantes afin de classer les valeurs de la série statistique `Y` dans une matrice à deux colonnes dont la première représente les modalités (par ordre croissant) et la seconde les effectifs correspondants et représenter le diagramme à bâtons des *fréquences* de la série statistique `Y`.

```
U=tabul(...... , .......) ;
bar(........., ............, 0.3, 'black')
```

(4) Recopier, exécuter et interpréter les instructions suivantes

```
x=1:length(U);
p=1-exp(-1);
G=(1-p)^x*p;
bar(x+.5, G, 0.3, 'yellow')
```