ECE 2 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison

Solution

Problème 1. Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres - D'après ESSEC III 2010

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes:

(Δ_1) **:** les coefficients diagonaux $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M;
(Δ_2) **:** la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

(1) Quand une matrice est triangulaire, on sait (d'après le cours) que ses valeurs propres **sont** les termes de la diagonale. Ainsi, les matrices triangulaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à$\mathcal{D}_n$.

(2) Soit M une matrice de $\mathcal{D}_n$. Les valeurs propres de M sont donc les termes de sa diagonale. Or,

$$\begin{aligned}
\beta \text{ est valeur propre de } (M+\alpha I_n) &\iff (M+\alpha I_n - \beta I_n) = (M-(\beta-\alpha)I_n) \text{ est non inversible}\\
&\iff \beta-\alpha \text{ est valeur propre de } M\\
&\iff \beta-\alpha \text{ est sur la diagonale de } M\\
&\iff \beta \text{ est sur la diagonale de } M+\alpha I
\end{aligned}$$

Ainsi, si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, la matrice $M+\alpha I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.

(3) On note K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

(a) On constat que

$$K_n \begin{pmatrix} 1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\\ \vdots \\ n\end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} 1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$$

donc n $(\neq 1)$ est valeur propre de K_n. Or K_n n'a que des 1 sur la diagonale et ne peut donc être un élément de $\mathcal{D}_n$.

(b) On utilise la question précédente pour écrire K_n comme combinaison linéaire de deux matrices éléments de $\mathcal{D}_n$. Il suffit de faire un découpage en somme d'une matrice triangulaire inférieure et d'une matrice triangulaire supérieure:

$$K_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Chacune des deux matrices est un élément de $\mathcal{D}_n$ (comme matrice triangulaire) mais leur somme, égale à K_n n'est pas un élément de $\mathcal{D}_n$ qui ne peut donc être un sous-espace vectoriel.

(4) (a) Soit (x, y, z) un élément $\mathbb{R}^3$. On peut utiliser la caractérisation de l'inversibilité par le *déterminant* de la matrice. En effet

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} \text{ inversible} &\iff 0 \times z - y \times x \neq 0 \\ &\iff xy \neq 0 \\ &\iff x \neq 0 \textbf{ et } y \neq 0. \end{aligned}$$

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2$. Ses valeurs propres sont donc nécessairement a et d. Mais, on observe que

$$\begin{aligned} M - aI_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d-a \end{pmatrix} \text{ non inversible} &\iff b = 0 \text{ ou } c = 0 \\ &\iff M \text{ est triangulaire (inférieure ou supérieure).} \end{aligned}$$

Il suit donc que les seules matrices de $\mathcal{M}_2$ qui sont des éléments de $\mathcal{D}_2$ sont les matrices triangulaires.

(5) On vérifie que les valeurs propres de A sont ses termes diagonaux, c'est à dire 3, 2 et 4.

- $A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ non inversible (deux colonnes identiques) donc 3 est valeur propre;
- $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ non inversible (deux colonnes identiques) donc 2 est valeur propre;
- $A - 4I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Or,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z &=& 0 \\ 2y + z &=& 0 \\ x + y &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z &=& 0 \\ 2y + z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 3y \\ z &=& 2y \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, $A - 4I$ est encore non inversible (son noyau n'est pas réduit à 0) et 4 est bien valeur propre.

Comme A est de taille 3 elle ne peut pas avoir plus de 3 valeurs propres distinctes. Donc les valeurs propres de A sont 2, 3 et 4 et comme elle a trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

(6) Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

(a) Par la méthode de Gauss, on détermine les conditions d'inversibilité de $M(t) - \alpha I$:

$$\begin{pmatrix} 3-\alpha & 1 & 1+t \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t-\alpha \end{pmatrix} L_3 \leftrightarrow L_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 3-\alpha & 1 & 1+t \end{pmatrix} L_3 - (3-\alpha) L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 0 & -2+\alpha & * \end{pmatrix} L_3 + L_2 \to L_3 \text{ avec } * = 1+t-(3-\alpha)(4+2t-\alpha)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 0 & 0 & -(3-\alpha)(4+2t-\alpha) \end{pmatrix} \text{ triangulaire.}$$

On peut donc déduire que les valeurs propres de $M(t)$ sont 2, 3 et $4+2t$ qui sont bien les termes diagonaux de $M(t)$ qui est donc bien un élément de $\mathcal{D}_3$.

(b)
- Si $4+2t \neq 2$ ($\Longleftrightarrow t \neq -1$) et $4+2t \neq 3$ ($\Longleftrightarrow t \neq -1/2$) alors $M(t)$ a trois valeurs propres distinctes et $M(t)$ est diagonalisable;

- Si $t = -1$: $M(-1) - \alpha I \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -(3-\alpha)(2-\alpha) \end{pmatrix}$. Pour $\alpha = 2$, (x, y, z) est vecteur propre associé à 2 $\Longleftrightarrow x + y = 0$ donc le sous espace propre associé est $E_2 = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 0), (0, 0, 1)\right)$.
  La famille étant de deux vecteurs non colinéaire est libre, et forme donc une base de E_2 et $\dim(E_2) = 2$. Comme la dimension du sous espace associé à 3 est au moins 1 alors $\dim(E_2)+\dim(E_3) \geq 3$ (cette dimension est donc 1). Donc, dans ce cas, $M(-1)$ est diagonalisable;

- Si $t = -1/2$: $M(-1/2) - \alpha I \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1/2 \\ 0 & 0 & -(3-\alpha)(3-\alpha) \end{pmatrix}$.
  Pour $\alpha = 3$ alors (x, y, z) est vecteur propre associé à 3 si et seulement si

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ -y - \frac{1}{2}z &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= -y \\ z &= -2y \end{cases}$$

  Donc le sous espace propre associé à 3 est $E_3 = \mathrm{Vect}(-1, 1, -2)$ qui est de dimension 1. Pour $\alpha = 2$ alors (x, y, z) est vecteur propre associé à 2 si et seulement si

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ \frac{-1}{2}z &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= -y \\ z &= 0 \end{cases}$$

  Donc le sous espace propre associé à 2 est $E_2 = \mathrm{Vect}(-1, 1, 0)$ qui est de dimension 1. Donc la somme des dimensions des sous espaces propres est 2 alors que $M(-1/2)$ est de taille 3. Donc $M(t)$ n'est pas diagonalisable pour $t = -1/2$.

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

(1) Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Il existe donc $p \neq 0$ tel que $M^p = 0$ et le polynôme X^p est annulateur de M. Si α est valeur propre de M alors $\alpha^p = 0$ et donc $\alpha = 0$. Il reste à montrer que 0 est bien valeur propre de M.

Comme $M^p = 0$ alors M est non inversible (sinon M^p le serait) donc 0 est valeur propre, ainsi 0 est la seule valeur propre de M.

(2) Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle. Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

(a) Si $x \in \ker(u)$ et comme $u(0) = 0$ (car u linéaire) alors $u(u(x)) = 0$ donc $x \in \ker(u^2)$.
Et de même si $x \in \ker(u^2)$ alors $u^2(x) = 0$ donc $u(u^2(x)) = u(0) = 0$.
Ainsi,
$$\ker(u) \subset \ker(u^2) \quad \text{et} \quad \ker(u^2) \subset \ker(u^3).$$

(b) Supposons que $\ker(u^2) = \ker(u^3)$. Il suit, par récurrence, que, pour $i \geq 2$, $\ker(u^i) = \ker(u^2)$.

En effet, il suffit de montrer le caractère héréditaire de cette propriété. Supposons que, pour un certain $i \geq 2$, on ait $\ker(u^i) = \ker(u^2)$. Montrons que $\ker(u^{i+1}) = \ker(u^2)$. Par un argument similaire à la question précédente, il est clair que $\ker(u^2) = \ker(u^i) \subset \ker(u^{i+1})$. Réciproquement, soit $x \in \ker(u^{i+1})$. Alors, $u^{i-2}(x) \in \ker(u^3) = \ker(u^2)$ donc $u^2(u^{i-2}(x)) = 0$ ou encore $x \in \ker(u^i) = \ker(u^2)$ et on a bien l'égalité cherchée.

On a supposé que $M^3 \neq 0$ donc $M^2 \neq 0$ et $\ker(u^2) \neq \mathbb{R}^3$. Si $\ker(u^2) = \ker(u^3)$, alors $\ker(u^i) = \ker(u^2)$ pour tout entier $i \geq 2$. Mais alors, $\ker(u^i) \neq \mathbb{R}^3$ et M ne peut être nilpotente. Il est donc clair que $\ker(u^2) \neq \ker(u^3)$.

(c) Avec le même argument que précédemment, on peut montrer que si $\ker(u) = \ker(u^2)$, alors $\ker(u^i) = \ker(u)$ pour tout $i \geq 1$ ce qui contredira aussi le caractère nilpotent de M. Ainsi, on a également $\ker(u) \neq \ker(u^2)$.

(d) Comme $\{0\} \subset \ker(u) \subset \ker(u^2) \subset \ker(u^3)$ et que les inclusions sont strictes, on en déduit des inégalités **strictes** sur les dimensions
$$0 < \dim(\ker(u)) < \dim\left(\ker(u^2)\right) < \dim\left(\ker(u^3)\right) \leq 3.$$
Ces dimension étant des nombres entiers, on a nécessairement, $\dim(\ker(u)) = 1$, $\dim(\ker(u^2)) = 2$ et $\dim(\ker(u^3)) = 3$ ou encore $\ker(u^3) = \mathbb{R}^3$, ce qui donne bien $M^3 = 0$.

(3) Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}.$$
On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

(a) Le calcul donne

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+be & bf & ad \\ ed & ac+df & cb \\ fc & ae & eb+df \end{pmatrix}$$

et

$$M^3 = \begin{pmatrix} ade+bcf & abe+a^2c+adf & b^2e+abc+bdf \\ ac^2+cdf+bce & ade+bcf & dac+d^2f+bde \\ be^2+def+ace & fbe+df^2+acf & ade+bcf \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$\gamma(M)M+\delta(M)I_3 = (ac+df+be)\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} + (bcf+ade)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M^3.$$

(b) Si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls, alors $M^3=0$ donc M est nilpotente. Réciproquement, si M est nilpotente alors d'après le raisonnement mené ci-avant, $M^3=0$ donc $\gamma(M)M+\delta(M)I_3=0$.

On a alors deux cas:

- ou bien tous les coefficients de M ne sont pas nuls, alors $\{M, I\}$ est libre (2 matrices non proportionnelles) donc $\gamma(M)=0$ et $\delta(M)=0$;

- ou bien tous ses coefficients sont nuls, alors $\gamma(M)=0$ et $\delta(M)=0$.

(c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1. Par la question précédente, M est nilpotente si et seulement si $ac+df+be=c+f+e=0$ et $bcf+ade=cf+e=0$, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} e &=& -cf \\ c+f-cf &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} e &=& -cf \\ c(1-f) &=& -f \end{array}\right.$$

et, pour $f \neq 1$, le système donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} e &=& f^2/(1-f) \\ c &=& -f/(1-f) \end{array}\right. .$$

Donc pour chaque $f\neq 1$ il y a une solution au système, ce qui en fait une infinité de triplets (c,e,f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

(d) Pour a, b et d égaux à 1 et $f\neq 1$ (et non nul afin que la matrice M ne soit pas triangulaire), la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -f/(1-f) & 0 & 1 \\ f^2/(1-f) & f & 0 \end{pmatrix}$$

est non triangulaire et nilpotente d'après les calculs précédents. Comme elle est nilpotente, sa seule valeur propre est 0. Et comme le seul terme sur sa diagonale est 0, on a $M\in\mathcal{D}_3$. On a bien exhibé une infinité de matrices non triangulaires et éléments de $\mathcal{D}_3$.

(e) Pour avoir tous les coefficients non nuls, on recycle la Partie I:
Avec $f=2$ on $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$ donc $M+I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$ a tous ses coefficients non nuls.

Problème 2 - D'après EML 2008

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

(1) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$\forall x \in [0;1], \quad h(x) = \frac{x}{2-x}.$$

(a) h est (définie et) dérivable sur $[0;1]$ et $h'(x) = \frac{2-x+x}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$.
Donc h est continue et strictement croissante sur $[0;1]$ donc bijective de $[0;1]$ dans $[h(0);h(1)] = [0;1]$. Par ailleurs, pour tous x et y de $[0;1]$:

$$\begin{aligned} h(x) = y &\iff \frac{x}{2-x} = y \\ &\iff x = y(2-x) \\ &\iff x(1+y) = 2y \\ &\iff x = \frac{2y}{1+y} \text{ car } 1+2y \neq 0 \end{aligned}$$

Donc

$$h^{-1}(y) = \frac{2y}{1+y}.$$

(b) On met au même dénominateur et on procède par identification.

$$\alpha + \frac{\beta}{2-x} = \frac{2\alpha + \beta - \alpha x}{2-x}.$$

Il est donc nécessaire (et suffisant) que $2\alpha + \beta = 0$ et $-\alpha = 1$ ou encore $\alpha = -1$ et $\beta = 2$.

(c) Comme h est continue sur $[0;1]$, l'intégrale est bien définie. On utilise l'écriture précédente:

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{2-x}\right)\mathrm{d}x \\ &= [-x - 2\ln(2-x)]_0^1 \\ &= -1 + 2\ln(2). \end{aligned}$$

(2) Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.

(a) Le cours nous permet d'affirmer, sans avoir à refaire les calculs, que

$$E(X) = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{12}.$$

(b) Soit $y \in [0,1]$. On a $\left(\frac{X}{2-X} \leq y\right) = (h(X) \leq y) = (X \leq h^{-1}(y))$ car h^{-1} est strictement croissante sur $[0;1]$ et que X et y en sont éléments.

Donc

$$\mathrm{P}\left(\frac{X}{2-X} \leq y\right) = \mathrm{P}\left(X \leq h^{-1}(y)\right) = F\left(h^{-1}(y)\right),$$

où F est la fonction de répartition de X. Or on sait que $F(t) = t$ si $t \in [0;1]$ et $h^{-1}(y)$ est bien un élément de $[0;1]$. On en conclut que

$$\mathrm{P}\left(\frac{X}{2-X} \leq y\right) = h^{-1}(y) = \frac{2y}{1+y}.$$

(c) Il est nécessaire de déterminer la fonction de répartition de Y, que l'on note F_Y. Par définition,

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P\left(\frac{X}{2-X} \leq t\right)$$

On commence par constater que, comme $X \in [0;1]$, $Y = h(X) \in [0;1]$ et donc la probabilité précédente est nulle si $t < 0$ et vaut 1 si $t \geq 0$. Si t est dans $[0;1]$, on conclut avec la question précédente. Au final,

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ \frac{2t}{1+t}, & \text{si } t \in [0;1] \\ 1, & \text{si } t > 1 \end{cases}.$$

La fonction de répartition F_Y étant continue sur $\mathbb{R}$ (il est facile de vérifier la continuité aux points de raccordement) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$, sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$, c'est bien la fonction de répartition d'une variable à densité. On obtient une densité f en dérivant F_Y là où c'est possible et en prenant des valeurs arbitraires ailleurs. On obtient

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{(1+t)^2}, & \text{si } t \in [0;1] \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

(d) On pourrait utiliser le théorème de transfert mais on se propose ici d'utiliser la fonction de densité obtenue à la question précédente. Y admet une espérance si et seulement si on a convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) \mathrm{d}x.$$

D'après l'expression de f ci-dessus, il suffit donc de montrer la convergence (et calculer la valeur) de l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2x}{(1+x)^2} \mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{2x+2}{(1+x)^2} \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}x}{(1+x)^2} \\ &= \left[\ln\left((1+x)^2\right)\right]_0^1 + \left[\frac{2}{1+x}\right]_0^1 \\ &= 2\ln(2) - 1 = E(Y). \end{aligned}$$

Partie II : Étude d'un temps d'attente

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note $I_1,\ I_2 \cdots, I_n$.

Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on modélise l'instant d'arrivée de l'invité I_k par une variable aléatoire T_k de loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$. On suppose de plus que, pour tout réel t, les n événements $(T_1 \leq t)$, $(T_2 \leq t)$, $\cdots (T_n \leq t)$, sont indépendants.

(1) Soit un réel t appartenant à $[0;1]$. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $(T_k \leq t)$ est réalisé et la valeur 0 sinon.

On note $S_t = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$.

(a) Pour tout entier$k$, $B_k = 1$ si l'invité numéro k est présent à l'instant t (et 0 sinon). B_k est donc une variable de Bernoulli de paramètre $P(T_k \leq t) = t$ (car $t \in [0;1]$ et on connait la fonction de répartition de la loi uniforme qui est bien celle de chacun des T_k). Il est alors clair que S_t correspond au nombre d'invités présents à l'instant t.

(b) S_t une somme de n variables de Bernouilli indépendantes de m ême paramètre t, donc c'est une loi binomiale:

$$S_t \hookrightarrow \mathcal{B}(n,t).$$

(2) (a) $(R_1 > t)$ signifie que la première arrivée est après t, c'est à dire qu'à l'instant t personne n'est encore arrivé. Donc $(R_1 > t) = (S_t = 0)$.

(b) La fonction de répartition H de R_1 est déterminée par

- $H(t) = 0$ si $t < 0$;
- $H(t) = \mathrm{P}(R_1 > t) = 1 - \mathrm{P}(S_t = 0) = 1 - (1-t)^n$ si $t \in [0,1]$;
- $H(t) = 1$ si $t > 1$.

H est continue sur $]-\infty, 0[$ sur $[0,1]$ et sur $]1, +\infty[$. De plus,

- en 0^- : $H(t) = 0 \to 0 = 1 - (1-0)^n = H(0)$;
- en 1^+ : $H(t) = 1 \to 1 = 1 - (1-1)^n = H(1)$;

Donc H est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ et donc R_1 est bien une variable à densité. Une densité est alors donnée par

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ n(1-t)^{n-1}, & \text{si } x \in [0,1] \\ 0, & \text{si } t > 1 \end{cases}.$$

(c) On s'inspire de la méthode précédente :
$(R_2 > t)$ signifie que le second arrive après t, c'est à dire qu'à l'instant t, il y a au plus un invité arrivé. Cela donne $(R_2 > t) = (S_t \le 1)$. Il suit que, pour $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S_t \le 1) &= \mathrm{P}(S_t = 0) + \mathrm{P}(S_t = 1) \\ &= (1-t)^n + nt(1-t)^{n-1} \text{ car } S_t \hookrightarrow \mathcal{B}(n,t) \\ &= (1-t)^{n-1}(1 + (n-1)t) \end{aligned}$$

Donc la fonction de répartition K de R_2 est définie par

$$K(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1 - (1-t)^{n-1}(1 + (n-1)t), & \text{si } t \in [0,1] \\ 1, & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Elle est comme précédemment continue sur $]-\infty, 0[$ sur $[0,1]$ et sur $]1, +\infty[$ ainsi qu'en 0^- et en 1^+. Donc K est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ donc R_2 est bien une variable à densité. Pour obtenir une densité, on commence par dériver K; sur $[0;1]$:

$$\begin{aligned} K'(t) &= (n-1)(1-t)^{n-2}(1 + (n-1)t) - (1-t)^{n-1}(n-1) \\ &= (n-1)(1-t)^{n-2}nt \end{aligned}$$

Il suit qu'une densité k de R_2 est donnée par

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ n(n-1)t(1-t)^{n-2}, & \text{si } x \in [0,1] \\ 0, & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Exercice

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite d'intégrales

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)}.$$

(1) $x \mapsto 1/(x^n(x+1))$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$ et

$$\frac{1}{x^n(x+1)} \sim \frac{1}{x^{n+1}}.$$

Comme $n+1 \geq 2$, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{n+1}}$ converge. Le critère des équivalents pour les fonctions positives permet de conclure que I_n converge pour tout n de N^*.

(2) (a) De

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{x+1} = \frac{(a-b)x+a}{x(x+1)}$$

on déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

(b) Pour tout A de $[1;+\infty[$,

$$\begin{aligned}
\int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} &= \int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \\
&= [\ln(x)]_1^A - [\ln(x+1)]_1^A \\
&= \ln(A) - \ln(A+1)\ln(2) \\
&\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)
\end{aligned}$$

ce qui permet d'affirmer que $I_1 = \ln(2)$.

(3) (a) Soit $n \geq 2$. On a, pour tout $x \geq 1$

$$0 \leqslant \frac{1}{x^n(x+1)} \leqslant \frac{1}{2x^n}.$$

Par croissance de l'intégrale et car les quantités de l'encadrement ont toutes des intégrales convergentes, on a

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)} \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x^n}.$$

Mais

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x^n} &= \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{2x^n} \\
&= \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{2(n-1)x^{n-1}}\right]_1^A \\
&= \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n-1)A^{n-1}} \\
&= \frac{1}{2(n-1)}.
\end{aligned}$$

Au final, on a bien
$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$

(b) Comme $1/2(n-1) \to 0,\ n \to +\infty$, le théorème des gendarmes permet de conclure que (I_n) converge et que
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

(4) (a) On constate que
$$\frac{1}{x^n(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)} = \frac{x+1}{x^{n+1}(x+1)} = \frac{1}{x^{n+1}},$$
et donc, par un calcul de l'intégrale de Riemann et par linéarité de l'intégrale,
$$I_n + I_{n+1} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \geq 1$,
$$\frac{1}{x^n(x+1)} \geq \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}$$
car $x^n \leqslant x^{n+1}$. Par croissance de l'intégrale, $I_n \geq I_{n+1}$ et on en déduit que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(c) Par (b), pour tout $n \geq 2$,
$$I_{n-1} + I_n \geq 2I_n \geq I_n + I_{n+1}$$
et donc, par (a),
$$\frac{1}{n-1} \geq 2I_n \geq \frac{1}{n},$$
et en multipliant par n,
$$\frac{n}{n-1} \geq 2nI_n \geq 1.$$
Par encadrement,
$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = 1,$$
autrement dit,
$$I_n \sim \frac{1}{2n}.$$
Par la règle des équivalents pour les séries à terme général positif, et puisque la série de Riemann $\sum 1/2n$ diverge, et la série de terme général I_n diverge.

(5) (a) Le même raisonnement qu'en 1., avec
$$\frac{1}{x^n(x+1)^2} \sim \frac{1}{x^{n+2}}$$
montre que J_n converge pour tout n de $\mathbb{N}$.

(b) Par définition,
$$J_0 = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{-1}{x+1}\right]_1^A = \frac{1}{2}.$$

(6) (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \geq 1$,

$$\frac{1}{x^k(x+1)^2} + \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2} = \frac{1+x}{x^k(x+1)^2} = \frac{1}{x^k(x+1)},$$

d'où, par linéarité, $J_k + J_{k-1} = I_k$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(J_k + J_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}J_k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}J_{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}J_k - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}J_k \\
&= (-1)^{n-1}J_n + J_0 \\
&= (-1)^n J_n + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(c) Soit $n \geq 2$. On a , pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leqslant \frac{1}{x^n(x+1)^2} \leqslant \frac{1}{4x^n}.$$

Le même raisonnement qu'en 3.(a) & (b) permet de conclure que, pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{4(n-1)},$$

et, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.$$

(d) En passant à la limite dans la relation de 6.(b) - sachant que $(-1)^{n-1}J_n$ tend vers 0, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k = \frac{1}{2},$$

ce qui permet de conclure que la série de terme général $(-1)^{n-1}I_n$ converge et sa somme vaut $1/2$.

(7) L'étude et les relations précédentes permettent de remplir les zones en pointillés du programme

```
n=input('n=?');
I=log(2); J=1/2;
J=I+J;
for k=2:n
    I=1/(k-1)-I;
    J=I+J;
end
disp(I, 'I_n=')
disp(J, 'J_n=')
```

Exercice sous SciLab

On rappelle que la commande `grand(1, N, 'exp', lam)` permet de générer un échantillon de taille N dont les composantes représentent des réalisations de variables aléatoires indépendantes de même loi normale $\mathcal{E}(\texttt{lam})$.

On considère une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et la variable $y = \lfloor X \rfloor$.

(1) La partie entière, sous SciLab s'obtient à l'aide de l'instruction `floor`. Il suit qu'il fallai compléter:

```
X=grand(1, 1000, 'exp', 1);
Y=floor(X);
```

(2) On obtient une valeur approchée de la moyenne avec l'instruction `mean()` et de la variance soit avec le carrée de l'écart-type (obtenu avec l'instruction `stdev()`) soit encore avec l'instruction `mean()` et la définition de la variance, ce qu'on propose ici

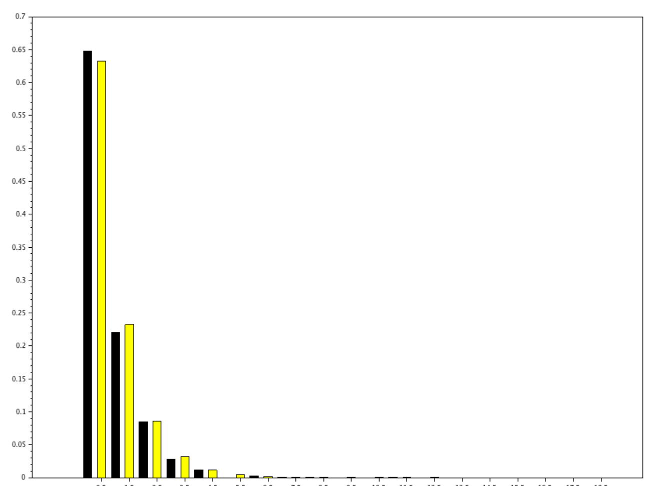
```
m=mean(Y);
v=mean((Y-m).^2);
```

On constate que SciLab renvoie `--> m=`
`0.565`
`--> v=`
`0.881775`

(3) On complète:

```
U=tabul(Y , 'i') ;
bar(U(:, 1), U(:, 2)/1000, 0.3, 'black')
```

(4) On recopie dans la console SciLab et on exécute les instructions du texte. On obtient la figure ci-dessous



Il s'agit des diagrammes à bâtons des fréquences (empiriques) de la loi Y et des valeurs théoriques d'une variable G telle que $G+1$ est géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-1}$. on retrouve donc un résultat vu dans un sujet de **EDHEC 2002**

$$Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-1}).$$