ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Surveillé n°1

Durée : 4 heures

Exercice 1. (Tour de chauffe). *Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.*

(1) Résoudre le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-3z-4t &=& -1 \\ 2x+2y+2z-3t &=& 2 \\ 3x+6y-2z+t &=& 8 \\ 2x+y+5z+t &=& 5 \end{array}\right. .$$

(2) Montrer que la fonction f définie sur $]-1;2[$ par $f(x)=\ln(-x^2+x+2)$ vérifie
$$\forall x \in [0;1], \qquad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

(3) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{2n}$, où la suite (u_n) est définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$ par la formule ci-dessous, est décroissante.
$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j}.$$

(4) Déterminer l'expression du terme général, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, de la suite (w_n) définie par
$$w_0 = 1, \qquad w_1 = 0, \quad \text{et} \quad w_{n+2} = 3w_{n+1} + 4w_n.$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse aux fonctions, définies sur $\mathbb{R}$,
$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k, \qquad f_n(x) = F_n'(x).$$

(1) Expliciter F_1, f_1, F_2 et f_2.

(2) Écrire une suite d'instructions `SciLab` permettant de représenter graphiquement et simultanément les fonctions F_1 et F_2 sur l'intervalle $[-5;5]$. (On commencera par définir deux fonctions `y=F_1(x)` et `y=F_2(x)`.)

(3) Exprimer $F_n(x)$ en fonction de x (et sans symbole Σ).

(4) En déduire une expression simple de $f_n(x)$, pour $x \neq 1$.

(5) En justifiant que $f_{n+1}(1) = f_n(1) + (n+1)$, déterminer, en fonction de n, l'expression de $f_n(1)$.

(6) En écrivant $f_n(x)$ à l'aide du symbole Σ et à l'aide de la question précédente, déterminer la valeur de la somme, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}}.$$

Exercice 3. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\varphi(x) = e^x - xe^{1/x}.$$

Partie I - Étude de la fonction φ

On admet que φ est *dérivable trois fois* sur $\mathbb{R}_+^*$ (ce qui garantie l'existence de φ', dérivée de φ, celle de φ'', dérivée de φ' et celle de φ''', dérivée de φ''). Enfin, on donne l'encadrement $2 < e < 3$.

(1) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{1/x}.$$
(2) Déterminer les variations de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
(3) En déduire les variations de φ' puis, montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi'(x) \geq e.$$
(4) En déduire les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(5) Déterminer la valeur de la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures. Donner une interprétation graphique du résultat.
(6) Déterminer les deux limites
$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.$$
Préciser alors la nature de la branche en $+\infty$ de la courbe de φ.
(7) On donne $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer que
$$\forall x \geq 3, \qquad \varphi(x) \geq ex.$$
Indication. On pourra poser $\psi(x) = \varphi(x) - ex$ et utiliser la Question (3).
(8) Représenter, sur un graphique orthonormé, la courbe de φ en y faisant apparaître les différents éléments étudiés.

Partie II - Étude de la suite (u_n)

On introduit la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par
$$u_0 = 3, \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \varphi(u_n).$$
(8) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n \geq 3e^n$.
(9) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
(10) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} \leq \frac{e - e^{-n}}{3(e-1)}.$$
(11) Que fait le programme suivant?

```
u=3;
n=0;
while u<=10^5
    u=exp(u)-u*exp(1/u);
    n=n+1;
end
disp(n)
```