Devoir Surveillé n°1

Solution

Exercice 1. (Tour de chauffe).

(1) On résout le système par un pivot de Gauss

$$\begin{cases} x+y-3z-4t &= -1 \\ 2x+2y+2z-3t &= 2 \\ 3x+6y-2z+t &= 8 \\ 2x+y+5z+t &= 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-3z-4t &= -1 \\ 8z+5t &= 4 \\ 3y+7z+13t &= 11 \\ -y+11z+9t &= 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+8z+5t &= 6 \\ y-11z-9t &= -7 \\ 8z+5t &= 4 \\ 40z+40t &= 32 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= 2 \\ 8y-17t &= -12 \\ 8z+5t &= 4 \\ 15t &= 12 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= 2 \\ y &= 1/5 \\ z &= 0 \\ t &= 4/5 \end{cases}.$$

(2) On aura observé que le polynôme du second degré à l'intérieur du logarithme est strictement positif si $x \in]-1;2[$. Par conséquent la fonction f est bien (définie et) dérivable sur l'intervalle susmentionné. De plus,

$$f'(x) = \frac{-2x+1}{-x^2+x+2}.$$

Afin d'encadrer $f'(x)$ sur $[0;1]$, il est nécessaire de connaître les variations de f' donc de dériver une fois de plus et de regarder le signe de la dérivée seconde. On a

$$f''(x) = \frac{-2x^2+2x-5}{(-x^2+x+2)^2} < 0$$

car le dénominateur a un discriminant strictement négatif. Ainsi, f' est strictement décroissante et, pour tout $x \in [0;1]$, on a

$$-\frac{1}{2} = f'(1) \leq f'(x) \leq f'(0) = \frac{1}{2},$$

ou encore l'inégalité souhaitée

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

(3) Par définition

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{2(n+1)} - u_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} \\ &= -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)} < 0, \end{aligned}$$

et la suite (v_n) est bien décroissante.

(4) C'est une suite à récurrence linéaire d'ordre 2. On commence par lui associer l'équation caractéristique

$$(E) \qquad\qquad q^2 - 3q - 4 = 0.$$

Cette équation admet pour solutions $q_1 = -1$ et $q_2 = 4$. On sait donc que u_n va s'écrire

$$u_n = \alpha(-1)^n + \beta 4^n,$$

où α et β sont encore à déterminer à l'aide des deux premiers termes de la suite. En les injectant, on obtient

$$1 = u_0 = \alpha + \beta, \qquad \text{et} \qquad 0 = u_1 = -\alpha + 4\beta.$$

On résout alors le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta &=& 1 \\ -\alpha + 4\beta &=& 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha &=& 4/5 \\ \beta &=& 1/5 \end{array} \right.$$

ce qui permet d'exprimer le terme général de la suite

$$u_n = \frac{4(-1)^n + 4^n}{5}.$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse aux fonctions, définies sur $\mathbb{R}$,

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k, \qquad f_n(x) = F_n'(x).$$

(1) Par définition, on a

$$F_1(x) = 1 + x, \quad f_1(x) = F_1'(x) = 1, \quad F_2(x) = 1 + x + x^2, \quad \text{et} \quad f_2(x) = F_2'(x) = 1 + 2x.$$

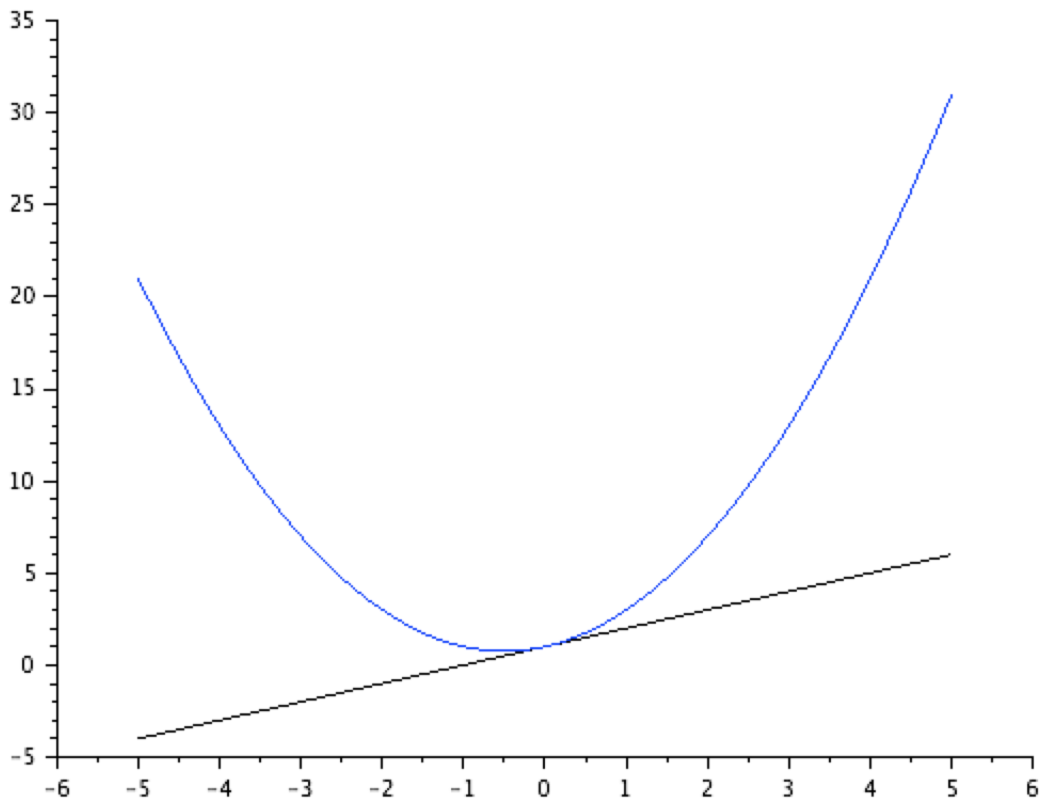
(2) Pour représenter graphiquement deux fonctions sur un même intervalle, on utilise la commande `plot2d()`. Plus précisément, on commence par définir les deux fonctions puis, la liste des abscisses (communes aux deux courbes) des points à "relier" (on prend par exemple un pas de 0.1) et, à l'aide de la commande `evalf()`, les ordonnées correspondantes, images par les fonctions précédentes des abscisses. On propose le script suivant, qui génère la figure ci-après.

```
function y=F_1(x)
    y=1+x;
endfunction

function y=F_2(x)
    y=1+x+x^2;
endfunction

A=-5:0.1:5; // on crée la liste des abscisses des points, avec un pas de 0.1
B=feval(A, F_1) //liste des ordonnées des points de la courbe de F_1
C=feval(A, F_2) //liste des ordonnées des points de la courbe de F_2

plot2d(A, [B',C'])
```



(3) On reconnait, en l'expression de $F_n(x)$ la somme d'une suite géométrique de raison x. On applique donc la formule du cours, en différenciant le cas $x = 1$ et $x \neq 1$.

$$\forall x \neq 1, \qquad F_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad F_n(1) = n + 1.$$

(4) Il suffit alors de dériver l'expression précédente. Pour $x \neq 1$, on a

$$f_n(x) = F_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1 - x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

(5) Comme $F_{n+1}(x) = F_n(x) + x^{n+1}$, en dérivant, on obtient $f_{n+1}(x) = f_n(x) + (n+1)x^n$. En prenant $x = 1$, on a donc bien la relation

$$f_{n+1}(1) = f_n(1) + n + 1.$$

De plus, on sait que $f_1(1) = 1$. Il suit, par sommes télescopiques que

$$f_n(1) - f_1(1) = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \sum_{j=2}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

ce qui permet d'écrire que
$$f_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(6) On a, à la question précédente, obtenu une expression pour $f_n(x)$. Mais par définition, f_n est la dérivée d'une somme. Les règles de dérivation nous disent que f_n est aussi égale à la somme des dérivées des quantités sommées dans la définition de F_n. Plus précisément,
$$f_n(x) = F_n'(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} (x^k)' = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$
Notamment, la formule obtenue à la question précédente et la remarque ci-dessus permet d'écrire la jolie formule, valable pour tout $x \neq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$
En appliquant à $x = 1/2$, on obtient
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} &= \frac{1-(n+1)(1/2)^n + n(1/2)^{n+1}}{(1-(1/2))^2} \\ &= 4\left(1 - \frac{3n+2}{2^{n+1}}\right).\end{aligned}$$

Exercice 3. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\varphi(x) = e^x - xe^{1/x}.$$

Partie I - Étude de la fonction φ

On admet que φ est *dérivable trois fois* sur $\mathbb{R}_+^*$ (ce qui garantie l'existence de φ', dérivée de φ, celle de φ'', dérivée de φ' et celle de φ''', dérivée de φ''). Enfin, on donne l'encadrement $2 < e < 3$.

(1) Il faut dériver successivement trois fois la fonction φ, à l'aide des formules de dérivation. On commence par se retrousser les manches. C'est parti! Soit $x > 0$.
$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= e^x - e^{1/x} - x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} \\ &= e^x + \left(\frac{1}{x} - 1\right) e^{1/x}.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= e^x + \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} \\ &= e^x - \frac{1}{x^3} e^{1/x}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\varphi'''(x) &= e^x + \left(\frac{3}{x^4}\right) e^{1/x} + \left(-\frac{1}{x^3}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} \\ &= e^x + \left(\frac{3x+1}{x^5}\right) e^{1/x},\end{aligned}$$
ce qui est bien la formule attendue. Ouf!

(2) Le signe de $\varphi'''(x)$ ne pose aucune difficulté. Les exponentielles sont strictement positives et le quotient l'est aussi pour tout $x > 0$. Ainsi, φ'' est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. On voit que
$$\varphi''(1) = e - \frac{1}{1^3} e = 0.$$
On en déduit le signe de $\varphi''(x)$ que l'on présente dans le tableau suivant:

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'''(x)$	‖		$+$		
φ''	‖	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\varphi'''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

(3) Le signe de $\varphi''(x)$ nous donne les variations de φ'. On constate aussi que $\varphi'(1) = e$. Le tableau est alors le suivant:

x	0		1		$+\infty$
$\varphi''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
φ'	‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, φ' admet e pour minimum sur $]0; +\infty[$, ou encore

$$\forall x > 0, \qquad \varphi'(x) \geq e.$$

(4) Si $\varphi'(x) \geq e$, en particulier $\varphi'(x) > 0$ et la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(5) Lorsque $x \to 0^+$, $1/x \to +\infty$. Il y a *a priori* une forme indéterminée. Mais

$$xe^{1/x} = \frac{e^{1/x}}{1/x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty,$$

par croissance comparée. Par algèbre des limites, on en déduit que $f(x) \to -\infty$, lorsque $x \to 0^+$, et la courbe de φ admet une asymptote verticale en 0.

(6) On utilise une croissance comparée après avoir factorisé par le terme dominant, ici e^x,

$$\varphi(x) = e^x \left(1 - xe^{-x}e^{1/x}\right).$$

Or, xe^{-x} tend vers 0 (croissance comparée) et $e^{1/x}$ tend vers 1 (algèbre des limites). Donc $\varphi(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Maintenant, on compare la croissance de $\varphi(x)$ à celle de x:

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{e^x}{x} - e^{1/x}.$$

Par croissance comparée, e^x/x tend vers $+\infty$, et on sait aussi que $e^{1/x}$ tend vers 1. Au final, le quotient étudié tend vers $+\infty$ et la courbe de φ présente, en $+\infty$, une branche parabolique de direction verticale.

(7) On donne $15 < \varphi(3) < 16$. Pour montrer l'inégalité souhaitée, il faut (et il suffit) de montrer que $\varphi(x) - ex \geq 0$. Posons alors $\psi(x) = \varphi(x) - ex$ qui, comme φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors,

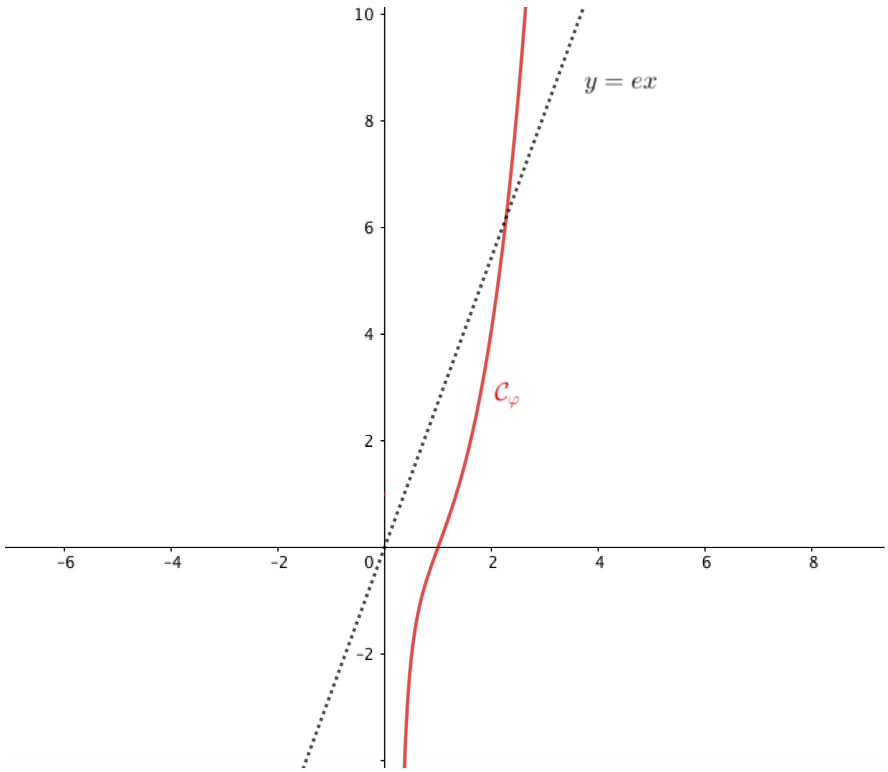
$$\psi'(x) = \varphi'(x) - e \geq 0$$

d'après la Question (3). Donc ψ est croissante sur $]0; +\infty[$ et en particulier sur $[3; +\infty[$. Son minimum sur $[3; +\infty[$ est alors atteint en $x = 3$. Plus précisément,

$$\forall x \geq 3, \quad \psi(x) \geq \psi(3) = \varphi(3) - 3e > 15 - 3e > 15 - 3 \times 3 > 0,$$

ce qui correspond bien à l'inégalité demandée.

(8) On représente la courbe de φ ainsi que la droite $y = ex$ qui sera au dessous de la courbe au moins pour $x \geq 3$.



Partie II - Étude de la suite (u_n)

On introduit la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3, \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

(8) u_0 est naturellement bien défini et $u_0 = 3 \geq 3e^0$, donc la propriété est initialisé. Supposons alors que, pour un certain $n \geq 0$, on ait u_n bien défini et $u_n \geq 3e^n$. En particulier $u_n > 0$ est dans l'ensemble de définition de φ et ainsi, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ existe. Mais de plus, par la Question (7)

$$u_{n+1} = \varphi(u_n) \geq eu_n \geq e \times 3e^n = 3e^{n+1},$$

et la récurrence est ainsi terminée.

(9) On montre que la suite est croissante par récurrence. C'est à dire, on montre que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \leq u_{n+1}$. Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3$ et $u_1 = \varphi(u_0) = \varphi(3) \geq 3e$ par la question (7). Or, $3e \geq 3$ donc $u_1 \geq u_0$. Supposons alors que $u_n \leq u_{n+1}$ pour un certain $n \geq 0$. Mais, par croissance de la fonction φ, on a

$$u_{n+1} = \varphi(u_n) \leq \varphi(u_{n+1}) = u_{n+2},$$

ce qu'on voulait.

(10) On utilise la minoration de u_n par $3e^n$ pour obtenir

$$\frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{3e^k}$$

puis, on somme pour k entre 0 et n et on utilise la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique (de raison e ici)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3e^k} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{e}\right)^k \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1-(1/e)^{n+1}}{1-1/e} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1-e^{-(n+1)}}{\frac{e-1}{e}} \\
&= \frac{e-e^{-n}}{3(e-1)},
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(11) Le programme permet de calculer et affiche le rang n du premier terme de la suite vérifiant $u_n \geq 10^5$.