ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°2

Durée: 4 heures

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées**. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1. (Questions de cours et échauffement) *Les questions de cet exercice sont indépendantes. On en soignera la rédaction.*

(1) On tire **cinq** cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir **exactement** deux dames et deux coeur? (*On présentera le résultat sous forme de fraction qu'on ne cherchera pas à calculer.*)

(2) (a) Montrer que, pour tous entiers n et k de $\mathbb{N}^*$, on a
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
(b) Soit $p \in]0;1[$. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = np.$$

(3) Soient A, B deux évènements d'un espace probabilisé. Montrer que
$$\max(0, P(A)+P(B)-1) \leq P(A\cap B) \leq \min(P(A), P(B)).$$

(4) On considère la suite (u_n) définie par
$$u_0 = \frac{1}{2}, \qquad u_{n+1} = \frac{2n+1}{u_n}.$$
Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il calcule et affiche $\displaystyle\sum_{k=0}^{99} u_k$.

```
u(1)=..................
for k=2:100
    u(k)=.............
end
disp(.................)
```

(5) Montrer que la suite (u_n) définie ci-dessous est croissante, majorée par 1 puis convergente. Préciser sa limite.
$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}.$$

Exercice 2. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

(1) **Question préliminaire**

On considère la suite (H_n) définie, pour tout entier $n \geq 1$, par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Montrer que (H_n) est croissante.

(b) Vérifier que pour tout entier k tel que $n+1 \leq k \leq 2n$, on a
$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n}.$$
En déduire que
$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

(c) Montrer par l'absurde, à l'aide de l'inégalité précédente, que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.

(2) **Étude d'une suite récurrente**.

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n par : $u_{n+1} = F(u_n)$.

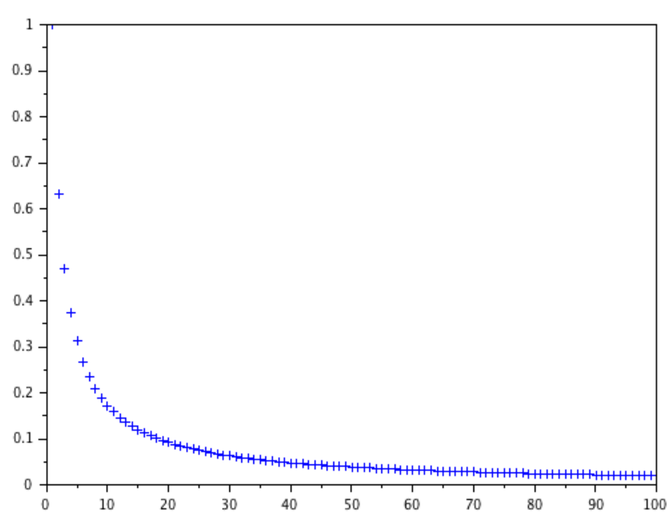
(a) Montrer que pour tout réel x : $e^x \geqslant x + 1$. Montrer que l'égalité a lieu **si et seulement si** $x = 0$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.

(c) Recopier et compléter le programme `SciLab` suivant qui permet de représenter les cent premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$:

```
U=zeros(1,100);
U(1)=1;
for n=1:99
    U(n+1)=..................
end
plot2d(1:100, U, -1)
```

(d) Le programme précédent complété permet d'obtenir la représentation graphique suivante :



Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la monotonie et la limite de la suite (u_n)?

(e) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
(f) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
(g) À l'aide de la question 2(a), montrer successivement que pour tout entier naturel n non nul:
$$u_{n+1} \geqslant \frac{u_n}{1+u_n} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant 1+\frac{1}{u_n}.$$
(h) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.
(i) À l'aide de la question précédente et de la question préliminaire, déterminer la nature de la suite (V_n) définie par
$$V_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Exercice 3. Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les évènements

- A_n: "le mobile se situe sur le sommet numéroté 1 à l'instant n";
- B_n: "le mobile se situe sur le sommet numéroté 2 à l'instant n";
- C_n: "le mobile se situe sur le sommet numéroté 3 à l'instant n";
- D_n: "le mobile se situe sur le sommet numéroté 4 à l'instant n";

et a_n, b_n, c_n, d_n les probabilités correspondantes. En particulier, on a $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = d_0 = 0$.

(1) Déterminer a_1, b_1, c_1 et d_1.
On admet pour la suite que
$$a_2 = \frac{1}{3}, \text{et} \quad b_2 = c_2 = d_2 = \frac{2}{9}.$$
(2) Justifier que, pour tout $n \geq 2$, $\{A_n, B_n, C_n, D_n\}$ forme un système complet d'évènements.
(3) (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a
$$a_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n + c_n + d_n)$$
(b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
(c) En explicitant un lien entre a_n, b_n, c_n et c_n, montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}.$$
(d) Établir alors que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

(4) (a) En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + c_n + d_n)$$
(b) En déduire une relation entre b_{n+1} et b_n.

(c) Montrer enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

(5) On admet que, pour tout entier naturel n, on a

$$c_{n+1} = -\frac{1}{3}c_n + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad d_{n+1} = -\frac{1}{3}d_n + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = d_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

(6) On **admet** que la *position moyenne* du mobile à l'instant n est donnée par le résultat de la somme

$$E_n = a_n + 2b_n + 3c_n + 4d_n.$$

(a) Calculer E_n.
(b) Déterminer la limite de E_n lorsque $n \to +\infty$. Interpréter.

Exercice 4. Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On dispose de n jetons numérotés de 1 à n. On tire, au hasard, sans remise, les jetons un à un. La suite des numéros tirés, que l'on peut noter $(a_1, a_2, ..., a_n)$ est aussi appelée permutation de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$.

Étant donnés deux entiers k et p vérifiant $1 \leq k \leq p \leq n$, la suite $(a_k, a_{k+1}, ..., a_p)$ est appelée *sous-suite* de $(a_1, a_2, ..., a_n)$ et son nombre d'éléments est appelé *longueur* de cette sous-suite.

On admet que cette expérience aléatoire peut être modélisée par la donnée de l'univers Ω, ensemble des permutations de $\{1, 2, ..., n\}$, muni de la tribu de ses parties $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme P.

(1) Soit $\omega \in \Omega$, que vaut $P(\{\omega\})$?

Étant donné une permutation $(a_1, a_2, ..., a_n)$, on définit la *première sous-suite croissante* de la façon suivante:

- dans le cas où $a_1 < a_2 < ... < a_n$, la première sous-suite croissante est $(a_1, a_2, ..., a_n)$;
- dans le cas contraire, si k est le plus petit entier de $\{1, 2, .., n-1\}$ vérifiant $a_k > a_{k+1}$, la première sous-suite croissante est $(a_1, a_2, ..., a_k)$.

On note ensuite, pour $k \in \{1, 2..., n\}$, A_k l'évènement : "la première sous-suite croissante de la permutation obtenue est de longueur k".

Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, la première sous-suite croissante est $(2, 3, 5)$ et sa longueur vaut 3, donc $\omega \in A_3$.

(2) Que vaut $P(A_n)$?
(3) Soit $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Étant donnés k nombres, combien de suites formées avec ces k nombres sont strictement croissantes? En déduire qu'il y a $\binom{n}{k} \times (n-k)!$ façons de tirer une permutation dont la longueur de la première sous-suite est au moins k.
(4) En déduire que, pour tout $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$

$$P(A_k) = P\left(\bigcup_{j=k}^{n} A_j\right) - P\left(\bigcup_{j=k+1}^{n} A_j\right) = \frac{k}{(k+1)!}.$$