ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

# Devoir Surveillé n°2

*Solution*

**Exercice 1.** (Questions de cours et échauffement) *Toutes ces questions ont été vues en classe ou en khôlle. Néanmoins, par bonté d'âme, on en propose une nouvelle solution ici.*

(1) Il faut distinguer deux cas, selon qu'on tire la dame de coeur ou non.

- Si on tire la dame de coeur, il faut choisir une autre dame parmi 3 puis un autre coeur parmi 7. Ensuite, il faut compléter avec 2 cartes prises parmi celles non coeur et non dames (il y en a 21). Cette alternative offre $3 \times 7 \times \binom{21}{2} = 4410$ possibilités.
- Dans l'autre cas, on choisit deux dames parmi les trois qui ne sont pas la dame de coeur, on choisi deux coeurs parmi les 7 qui ne sont pas la dame de coeur et on complète avec une carte parmi 21 qui n'est ni du coeur ni la dame. Cette seconde alternative offre $\binom{3}{2} \times \binom{7}{2} \times 21 = 441 \times 3 = 1323$ possibilités.

Au final, on a $1323 + 4410 = 5733$ mains correspondant à la situation. Il y a $\binom{32}{5}$ façons de piocher 5 cartes. La probabilité d'obtenir une des mains décrites est donc

$$p = \frac{5733}{\binom{32}{5}} = \frac{120 \times 5733}{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}.$$

(2) (a) Soient $n$ et $k$ dans $\mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} n\binom{n-1}{k-1} &= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= k\binom{n}{k} \end{aligned}$$

(b) Soit $p \in ]0;1[$. On va utiliser la formule du binôme et la question ci-dessus. Commençons par observer que pour $k = 0$, le terme de la somme fait 0, on peut donc faire commencer cette somme à $k = 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= n\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}p^{j+1}(1-p)^{n-1-j} \qquad\qquad (j=k-1)\\
&= np\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}p^{j}(1-p)^{n-1-j}\\
&= np(p+(1-p))^{n-1} \qquad \text{(par la formule du binôme)}\\
&= np,
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(3) Par définition, $A\cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ donc $P(A\cap B) \leq P(A)$ et $P(A\cap B) \leq P(B)$. Une une quantité est plus petite que deux autres quantités, elle est en particulier plus petite que le minimum de ces deux quantités. On a donc l'inégalité de droite de l'encadrement demandé.

Pour l'inégalité de gauche, commençons par écrire que, par la formule du crible,

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Or cette quantité pourrait être négative, mais une probabilité étant toujours positive ou nulle, on a aussi $P(A\cap B) \geq 0$. On a donc bien également l'inégalité de gauche.

(4) On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$u_0 = \frac{1}{2}, \qquad u_{n+1} = \frac{2n+1}{u_n}.$$

Il faut remplir le vecteur-ligne avec les termes de la suite et utiliser la commande `sum()`. Attention cela-dit. La composante `u(k)` contient le terme $u_{k-1}$ qui vaut $[2(k-2)+1]/u_{k-2}$.

```
u(1)=1/2;
for k=2:100
    u(k)=(2*(k-2)+1)/u(k-1);
end
disp(sum(u))
```

(5) Il est facile de voir qu'ici $(u_n)$ est croissante. En effet,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{2} = \frac{(u_n-1)^2}{2} \geq 0,$$

et la suite est bien croissante. On fait une récurrence rapide pour montrer qu'elle est majorée par 1:

- <u>initialisation:</u> $u_0 = 0 \leq 1$.
- <u>hérédité:</u> supposons $u_n \leq 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2} \geq \frac{1+1}{2} = 1,$$

et la récurrence est terminée.

La suite $(u_n)$ étant croissante et majorée, le théorème de convergence monotone assure qu'elle converge vers une limite $\ell$. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on a nécessairement

$$\ell = \frac{\ell+1}{2} \iff \ell = 1.$$

Ainsi la suite $(u_n)$ converge vers 1.

**Exercice 2.** (Exercice basé sur un exercice d'**ECRICOME 2015**)

On considère la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

(1) **Question préliminaire**

On considère la suite $(H_n)$ définie, pour tout entier $n \geq 1$, par $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Il est clair que

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0,$$

et que la suite $(H_n)$ est (strictement) croissante.

(b) Soit $k$ compris entre $n+1$ et $2n$. Par décroissance de la fonction inverse on a

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}.$$

Or, comme

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k};$$

l'encadrement précédent donne

$$H_{2n} - H_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} 1 = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

(c) La suite $(H_n)$ est croissante. Supposons qu'elle ne diverge pas vers $+\infty$, elle est donc convergente vers une limite $\ell$ (application du théorème de convergence monotone). Mais $(H_{2n})$ converge également vers $\ell$ donc

$$H_{2n} - H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$$

ce qui est contradictoire avec le fait que cette différence est toujours supérieure ou égale à $1/2$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty.$$

(2) **Étude d'une suite récurrente**.

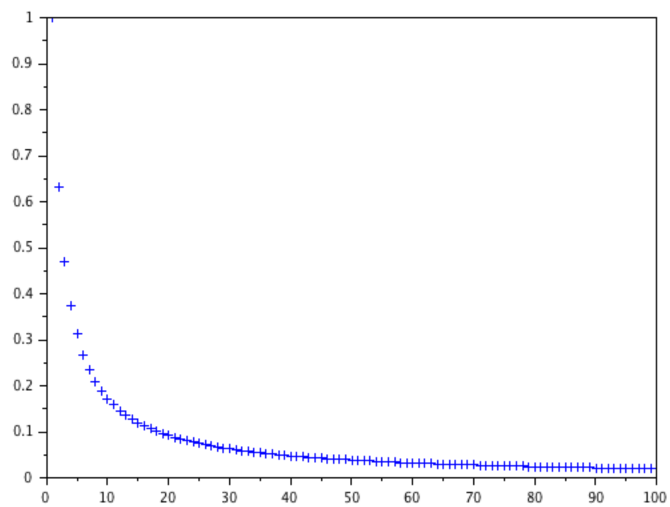
On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel non nul $n$ par : $u_{n+1} = F(u_n)$.

(a) C'est une inégalité ultra-classique, déjà vu. On peut poser $g(x) = e^x - x - 1$, voir que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(x) = e^x - 1$, ce qui est positif sur $[0; +\infty[$ et négatif ailleurs. Ainsi, $g$ admet un minimum en $x = 0$ et ce minimum vaut $g(0) = 0$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$, ce qui est bien une reformulation de l'inégalité demandée.

Par ailleurs, $g$ ne s'annule qu'en 0, ce qu'on peut voir par un argument lié au théorème des valeurs intermédiaires combiné avec la stricte monotonie sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$. Donc l'égalité $e^x = x + 1$ n'a lieu que pour $x = 0$.

(b) C'est une récurrence rapide et facile:
- initialisation: $u_1 = 1 > 0$.
- hérédité: supposons que pour un certain $n \geq 1$, on ait $u_n > 0$. Comme $u_n > 0$, $F(u_n) = 1 - e^{-u_n}$, mais on sait aussi que $-u_n < 0$ et donc $e^{-u_n} < 1$ donc
$$u_{n+1} = F(u_n) = 1 - e^{-u_n} > 0$$
ce qui termine la récurrence.

(c) La ligne manquante sur le programme est tout simplement
```
U(n+1)=1-exp(-U(n))
```
(d) Le programme précédent complété permet d'obtenir la représentation graphique suivante :




Il est tout à fait raisonnable, au vu de la figure ci-dessus, de conjecturer que la suite $(u_n)$ converge et que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

(e) D'après les questions précédentes
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= F(u_n) - u_n \\ &= 1 + (-u_n) - e^{-u_n} \leq 0 \end{aligned}$$
d'après la Question 2a appliquée à $x = u_n$. Ainsi, la suite $(u_n)$ est décroissante.

(f) Par théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)$ est décroissante et minorée (par 0), donc elle converge vers une limite $\ell$. Par continuité de la fonction $F$ sur $[0; +\infty[$, le passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = F(u_n)$ donne
$$\ell = 1 - e^{-\ell} \Longleftrightarrow e^{-\ell} - (-\ell) - 1 = 0 \Longleftrightarrow -\ell = 0$$
d'après la deuxième partie de la Question 2a. On a donc bien montré que la suite $(u_n)$ convergeait vers 0, comme conjecturé ci-avant.

(g) D'après la question 2a,
$$e^{u_n} \geqslant u_n + 1 \Longrightarrow \frac{1}{e^{u_n}} \leqslant \frac{1}{u_n+1}.$$
Puis,
$$1 - \frac{1}{e^{u_n}} \geqslant 1 - \frac{1}{u_n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$$
et donc
$$u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} = 1 - \frac{1}{e^{u_n}} \geq \frac{u_n}{u_n+1}.$$

On passe ensuite à l'inverse,

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1+u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + 1.$$

(h) On procède comme demandé par récurrence

- initialisation: $u_1 = 1 \geq 1/1$.
- hérédité: supposons que pour un certain $n \geq 1$, $u_n \geq 1/n$ (ou de manière équivalente $1/u_n \leq n$). Alors, d'après la question précédente

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{u_n} \leq 1 + n.$$

En repassant à l'inverse, on a bien

$$u_{n+1} \geq \frac{1}{n+1}.$$

(i) Il apparaît clair que tous les termes de $(V_n)$ sont positifs et que, d'après la question précédente,

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n.$$

Or, d'après la partie préliminaire, $(H_n)$ diverge vers $+\infty$ et par comparaison des suites à termes positifs, on peut conclure que $(V_n)$ aussi.

**Exercice 3.** (D'après **EDHEC 2017**) Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les évènements

- $A_n$: "le mobile se situe sur le sommet numéroté 1 à l'instant $n$";
- $B_n$: "le mobile se situe sur le sommet numéroté 2 à l'instant $n$";
- $C_n$: "le mobile se situe sur le sommet numéroté 3 à l'instant $n$";
- $D_n$: "le mobile se situe sur le sommet numéroté 4 à l'instant $n$";

et $a_n, b_n, c_n, d_n$ les probabilités correspondantes. En particulier, on a $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = d_0 = 0$.

(1) Le mobile quitte sommet 1 donc il est clair que $a_1 = 0$. En revanche, il peut se retrouver, avec la même probabilité, sur chacun des trois autres sommets, ainsi

$$b_1 = c_1 = d_1 = \frac{1}{3}.$$

On admet pour la suite que

$$a_2 = \frac{1}{3}, \text{et} \quad b_2 = c_2 = d_2 = \frac{2}{9}.$$

(2) Il n'est pas si trivial de prouver qu'au moment $n$ le mobile peut se trouver en chacun des quatre sommets. Si on veut faire une démonstration rigoureuse, on doit raisonner par récurrence. A priori, tous les points sont possibles à atteindre en $n$ déplacements (sauf 1 pour $n = 1$). On note, pour $n \geq 2$, la propriété $(H_n)$ : "tous les sommets sont accessibles au moment $n$".

- initialisation: pour $n = 2$, c'est une conséquence du résultat admis ci-dessus (aucune des probabilités n'est nulle).

- hérédité: supposons $(H_n)$ vraie pour un certain $n \geq 2$. Soit $j \in \{1,2,3,4\}$. Par la formule des probabilités totale (appliquée au *s.c.e* $\{A_n, B_n, C_n, D_n\}$ qui en est bien un par HR), la probabilité d'être en $j$ au moment $n+1$ est égale à $1/3$ multiplié par la probabilité d'être en dehors de $j$ au moment $n$. Aucune de ces probabilité n'est nulle. Ainsi, aucun des évènements $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}$ n'est vide. Étant deux à deux disjoints et leur réunion formant l'univers (il n'y a que quatre sommets possibles), on a bien à nouveau un s.c.e ce qui termine la récurrence.

(3) (a) D'après les arguments énoncés ci-avant, cette question devient triviale. On applique la formule des probabilités totales au s.c.e susnommé. Comme la probabilité de rester sur le même sommet est nulle et que celles de changer pour un des trois autres sommets sont toutes trois égales à $1/3$, on a

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) + P_{D_n}(A_{n+1})P(D_n) \\ &= \frac{1}{3}(b_n + c_n + d_n) \end{aligned}$$

(b) Pour $n = 0$, on a

$$a_1 = 0 = \frac{1}{3}(b_0 + c_0 + d_0)$$

car $b_0 = c_0 = d_0 = 0$ donc c'est vrai pour $n = 0$. Pour $n = 1$, c'est donné par la propriété admise

$$a_2 = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)$$

car $b_1 = c_1 = d_1 = 1/3$.

(c) Pour $n \geq 2$, $\{A_n, B_n, C_n, D_n\}$ forme un s.c.e dont la somme de leurs probabilités fait 1. La formule reste vraie (on le vérifie avec les valeurs mentionnées ci-dessus) pour $n = 0$ et $n = 1$

$$a_n + b_n + c_n + d_n = 1.$$

(d) D'après la question précédente, $b_n + c_n + d_n = 1 - a_n$, donc

$$a_n = \frac{1}{3}(b_n + c_n + d_n) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}a_n.$$

On reconnait alors une suite arithmético-géométrique pour laquelle on a un schéma d'étude:

- On cherche le point fixe $\ell$ solution de $\ell = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\ell$. On trouve ici $\ell = \frac{1}{4}$.
- La suite $(a_n - \ell)$ est géométrique de raison $(-1/3)$ et de premier terme $a_0 = 1$. Donc

$$a_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(a_0 - \frac{1}{4}\right)$$

ou encore

$$a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

(4) (a) Encore une fois, il faut distinguer le cas $n \geq 2$, pour lequel on applique la formule des probabilités totales au s.c.e $\{A_n, B_n, C_n, D_n\}$, et qui donne immédiatement

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + c_n + d_n),$$

et les cas $n = 0$ et $n = 1$ pour lesquels on vérifie *à la main* que la formule est vraie. Mais c'est un calcul, facile, à faire apparaître mais qu'on omet ici.

(b) Toujours grâce au fait que $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$, on obtient

$$b_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}b_n.$$

(c) C'est encore une relation de type arithmético-géométrique. La seule différence avec précédemment est la valeur du premier terme $b_0 = 0$ qui donne donc l'expression un peu différente

$$b_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

(5) Les suites $(c_n)$ et $(d_n)$ sont définies par la même relation de récurrence que $(b_n)$ et ont en plus la même premier terme, égal à 0. Leur expression est donc la même et vaut

$$c_n = d_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

(6) (a) On injecte les expressions précédentes:

$$\begin{aligned} E_n &= a_n + 2b_n + 3c_n + 4d_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + ()\,(2+3+4) \\ &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

(b) La quantité précédente tend vers 5/2.

**Exercice 4.** (Une ré-interprétation de **ESSEC II 2001**) Dans tout l'exercice, $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 2. On dispose de $n$ jetons numérotés de 1 à $n$. On tire, au hasard, sans remise, les jetons un à un. La suite des numéros tirés, que l'on peut noter $(a_1, a_2, ..., a_n)$ est aussi appelée permutation de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$.

Étant donnés deux entiers $k$ et $p$ vérifiant $1 \leq k \leq p \leq n$, la suite $(a_k, a_{k+1}, ..., a_p)$ est appelée *sous-suite* de $(a_1, a_2, ..., a_n)$ et son nombre d'éléments est appelé *longueur* de cette sous-suite.

On admet que cette expérience aléatoire peut être modélisée par la donnée de l'univers $\Omega$, ensemble des permutations de $\{1, 2, ..., n\}$, muni de la tribu de ses parties $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme $P$.

(1) La probabilité d'un singleton, pour la probabilité uniforme, est égale à l'inverse du cardinal de l'univers. Il y a $n!$ permutations d'un ensemble à $n$ éléments donc $\#\Omega = n!$ et

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{n!}.$$

Étant donné une permutation $(a_1, a_2, ..., a_n)$, on définit la *première sous-suite croissante* de la façon suivante:

- dans le cas où $a_1 < a_2 < ... < a_n$, la première sous-suite croissante est $(a_1, a_2, ..., a_n)$;
- dans le cas contraire, si $k$ est le plus petit entier de $\{1, 2, .., n-1\}$ vérifiant $a_k > a_{k+1}$, la première sous-suite croissante est $(a_1, a_2, ..., a_k)$.

On note ensuite, pour $k \in \{1, 2..., n\}$, $A_k$ l'évènement : "la première sous-suite croissante de la permutation obtenue est de longueur $k$".

Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, la première sous-suite croissante est $(2, 3, 5)$ et sa longueur vaut 3, donc $\omega \in A_3$.

(2) Le fait que la première sous-suite croissante soit de longueur $n$ signifie que la suite des numéros tirés est nécessairement $(1, 2, 3, ..., n)$. Par conséquent,

$$P(A_n) = P(\{(1, 2, ..., n)\}) = \frac{1}{n!}.$$

(3) Soit $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Étant donnés $k$ nombres, il n'y a qu'une seule suite croissante formée ce ces nombres: celle où les nombres sont rangés dans l'ordre croissant. Si on veut que la longueur de la première sous-suite croissante soit d'au moins $k$, cela veut dire qu'il faut au moins que les $k$ premiers nombres soient rangés dans l'ordre croissant. On va donc choisir ces $k$ nombres parmi $n$ ($\binom{n}{k}$ choix), les ranger dans l'ordre croissant (un seul choix) puis compléter notre suite des numéros tirés en permutant les $n-k$ numéros restants (ce qu'on peut faire de $(n-k)!$ façons). Au final, le nombre listes dont la première sous-suite croissante est de longueur supérieure ou égal à $k$ est

$$\#\left(\bigcup_{j=k}^{n} A_j\right) = \binom{n}{k}(n-k)!$$

(4) Il est clair que

$$\begin{aligned}
P(A_k) &= P\left(\bigcup_{j=k}^{n} A_j\right) - P\left(\bigcup_{j=k+1}^{n} A_j\right) \\
&= \frac{\binom{n}{k}(n-k)!}{n!} - \frac{\binom{n}{k+1}(n-k-1)!}{n!} \\
&= \frac{\frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!} - \frac{n!(n-k-1)!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{n!} \\
&= \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \\
&= \frac{k}{(k+1)!}.
\end{aligned}$$