ECE 2 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°3

Durée: 4 heures

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées**. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1. On considère l'application $\varphi :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < e < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

(1) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0;+\infty[$, calculer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer :
$$\forall x \in]0;+\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x}e^{\frac{1}{x}}.$$
(2) Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de φ', et montrer : $\forall x \in]0;+\infty[, \varphi'(x) \geqslant e$.
(3) Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.
(4) Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
(5) On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3;+\infty[, \varphi(x) \geqslant ex$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ.
(6) Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.
(7) Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.
On précisera la nature de la branche infinie au voisinage de 0 et la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

(8) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3e^n$. (On pourra utiliser les résultats de la partie I).
(9) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.
(10) Écrire un programme en `SciLab` qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$.
(11) Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

Exercice 2. Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimité de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre $2, 4, 1, 5, 9$, alors on obtient : $S_1 = 2,\ S_2 = 6,\ S_3 = 7,\ S_4 = 12,\ S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

(1) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
(2) (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
 (b) Calculer $P(T_n = 1)$.
 (c) Montrer que :

$$P(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

(3) Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.
(4) Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $E(T_3) = \dfrac{16}{9}$.

Partie B

(5) Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
(6) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
 (a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}.
 (b) En utilisation un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j).$$

(7) (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres :

$$\binom{j-1}{k-1}, \quad \binom{j-1}{k}, \quad \text{et} \quad \binom{j}{k}.$$

 (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

 (c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$\forall i \in [\![k, n]\!],\ P(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1}.$$

 Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

(8) (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements: $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.

(b) En déduire que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}.$$

(9) Démontrer que $E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)$, puis que $E(T_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.

(10) Calculer $\lim_{n\to+\infty} E(T_n)$.

(11) On rappelle qu'en langage `Scilab`, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie un entier aléatoire de $[\![1, n]\!]$.[1] Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n:

```
function y=T(n)
    S=.................
    y=.................
    while.............
        tirage = grand(1,1,'uin', 1, n);
        S=S+tirage;
        y=............
    end
endfunction
```

Tournez la page s'il vous plait.

[1] L'énoncé original oublie de préciser "selon la loi uniforme".

Exercice 3. Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Étude de la matrice A

(1) Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.
(2) En déduire l'ensemble des valeurs propres de A.
(3) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1,1[, \varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

(4) Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
(5) En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non nul tel que :
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$
(6) On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.
(7) Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que $(P(C))^2 = A$. Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A.

Dans cette partie, on pose: $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(8) Soient u, v et w les vecteurs définis par: $\begin{cases} w = (1,0,1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$
   (a) Calculer les vecteurs v et u.
   (b) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.
   (d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.

(9) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme :
   $$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$
   où a, b et c sont trois réels.
   (b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.
(10) Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.
(11) L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel?