Devoir Surveillé n°3

Durée: 4 heures

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées**. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1. (D'après **EML 2014**)

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi(x) = e^x - xe^{1/x}.$$

Partie I - Étude de la fonction φ

(1) Sur $]0;+\infty[$, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^3$ comme combinaison de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il faut dériver successivement trois fois la fonction φ, à l'aide des formules de dérivation. On commence par se retrousser les manches. C'est parti! Soit $x > 0$.

$$\begin{array}{rcl}
\varphi'(x) & = & e^x - e^{1/x} - x \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) e^{1/x} \\
& = & e^x + \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) e^{1/x}. \\
\varphi''(x) & = & e^x + \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) e^{1/x} + \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) e^{1/x} \\
& = & e^x - \dfrac{1}{x^3} e^{1/x} \\
\varphi'''(x) & = & e^x + \left(\dfrac{3}{x^4}\right) e^{1/x} + \left(-\dfrac{1}{x^3}\right) \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) e^{1/x} \\
& = & e^x + \left(\dfrac{3x+1}{x^5}\right) e^{1/x},
\end{array}$$

ce qui est bien la formule attendue. Ouf!

(2) Le signe de $\varphi'''(x)$ ne pose aucune difficulté. Les exponentielles sont strictement positives et le quotient l'est aussi pour tout $x > 0$. Ainsi, φ'' est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. On voit que

$$\varphi''(1) = e - \frac{1}{1^3}e = 0.$$

On en déduit le signe de $\varphi''(x)$ que l'on présente dans le tableau suivant:

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'''(x)$	$\|$		$+$		
φ''	$\|$	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$	$+\infty$
$\varphi''(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

Le signe de $\varphi''(x)$ nous donne les variations de φ'. On constate aussi que $\varphi'(1) = e$. Le tableau est alors le suivant:

x	0		1		$+\infty$
$\varphi''(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
φ'	$\|$	$+\infty$ $\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, φ' admet e pour minimum sur $]0; +\infty[$, ou encore

$$\forall x > 0, \qquad \varphi'(x) \geq e.$$

(3) Lorsque $x \to 0^+$, $1/x \to +\infty$. Il y a *a priori* une forme indéterminée. Mais

$$xe^{1/x} = \frac{e^{1/x}}{1/x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty,$$

par croissance comparée. Par algèbre des limites, on en déduit que $f(x) \to -\infty$, lorsque $x \to 0^+$, et la courbe de φ admet une asymptote verticale en 0.

(4) On utilise une croissance comparée après avoir factorisé par le terme dominant, ici e^x,

$$\varphi(x) = e^x \left(1 - xe^{-x}e^{1/x})\right).$$

Or, xe^{-x} tend vers 0 (croissance comparée) et $e^{1/x}$ tend vers 1 (algèbre des limites). Donc $\varphi(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Maintenant, on compare la croissance de $\varphi(x)$ à celle de x:

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{e^x}{x} - e^{1/x}.$$

Par croissance comparée, e^x/x tend vers $+\infty$, et on sait aussi que $e^{1/x}$ tend vers 1. Au final, le quotient étudié tend vers $+\infty$ et la courbe de φ présente, en $+\infty$, une branche parabolique de direction verticale.

(5) On donne $15 < \varphi(3) < 16$. Pour montrer l'inégalité souhaitée, il faut (et il suffit) de montrer que $\varphi(x) - ex \geq 0$. Posons alors $\psi(x) = \varphi(x) - ex$ qui, comme φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors,

$$\psi'(x) = \varphi'(x) - e \geq 0$$

d'après la Question (3). Donc ψ est croissante sur $]0; +\infty[$ et en particulier sur $[3; +\infty[$. Son minimum sur $[3; +\infty[$ est alors atteint en $x = 3$. Plus précisément,

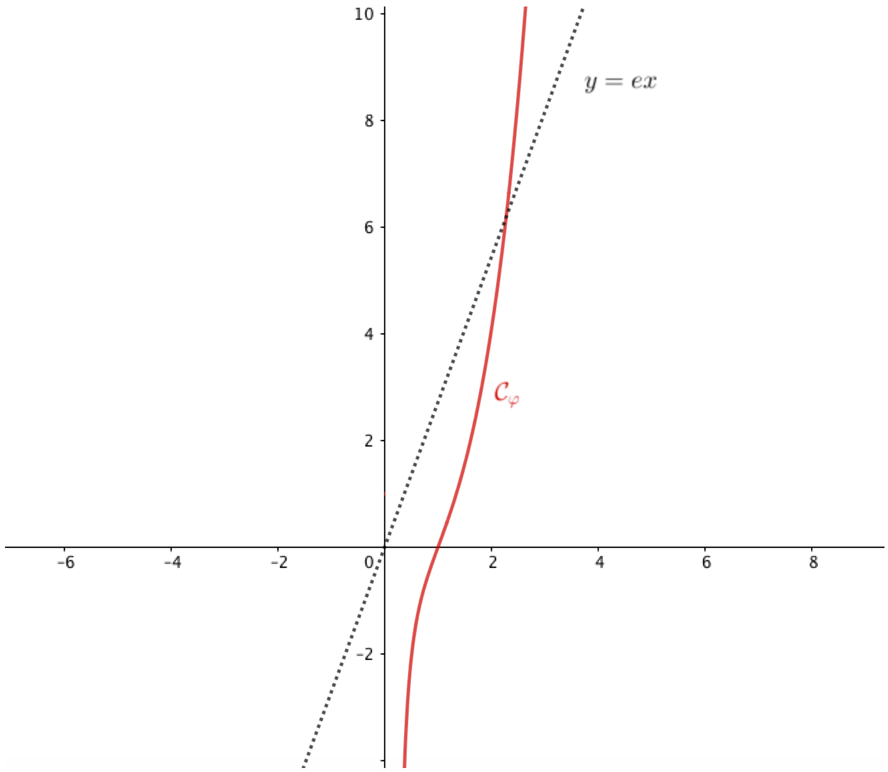
$$\forall x \geq 3, \quad \psi(x) \geq \psi(3) = \varphi(3) - 3e > 15 - 3e > 15 - 3 \times 3 > 0,$$

ce qui correspond bien à l'inégalité demandée.

(6) Pour chercher les éventuels points d'inflexion, il faut regarder où la dérivée seconde s'annule. Ici, d'après le tableau de variations de φ'' et le théorème de bijection (on sait que φ'' est continue - car φ de classe $\mathcal{C}^3$ - et strictement croissante), on voit qu'elle ne s'annule qu'en $x = 1$. La courbe de φ ne présente donc qu'un seul point d'inflexion, dont les coordonnées sont $(1; \varphi(1)) = (1; 0)$. De plus, la tangente à la courbe en ce point a pour équation

$$T_1 \; y = \varphi'(1)(x-1) + \varphi(1) = ex - e.$$

(7) Si $\varphi'(x) \geq e$, en particulier $\varphi'(x) > 0$ et la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On représente la courbe de φ ainsi que la droite $y = ex$ qui sera au dessous de la courbe au moins pour $x \geq 3$.



Partie II - Étude de la suite (u_n)

On introduit la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3, \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

(8) u_0 est naturellement bien défini et $u_0 = 3 \geq 3e^0$, donc la propriété est initialisée. Supposons alors que, pour un certain $n \geq 0$, on ait u_n bien défini et $u_n \geq 3e^n$. En particulier $u_n > 0$ est dans l'ensemble de définition de φ et ainsi, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ existe. Mais de plus, par la Question (7)

$$u_{n+1} = \varphi(u_n) \geq eu_n \geq e \times 3e^n = 3e^{n+1},$$

et la récurrence est ainsi terminée.

(9) On montre que la suite est croissante par récurrence. C'est à dire, on montre que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \leq u_{n+1}$. Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3$ et $u_1 = \varphi(u_0) = \varphi(3) \geq 3e$ par la question (7). Or, $3e \geq 3$ donc $u_1 \geq u_0$. Supposons alors que $u_n \leq u_{n+1}$ pour un certain $n \geq 0$. Mais, par croissance de la fonction φ, on a

$$u_{n+1} = \varphi(u_n) \leq \varphi(u_{n+1}) = u_{n+2},$$

ce qu'on voulait. Si la suite (u_n) est majorée, alors celle-ci converge vers une limite ℓ (par application du théorème de convergence monotone). Par continuité de φ, le passage à la limite dans la relation de récurrence, il est alors nécessaire que ℓ soit solution de $\ell = \varphi(\ell)$. Mais cela n'est pas possible, car pour tout $x \geq 3$, $\varphi(x) \geq ex > x$ (et naturellement $u_n \geq 3e^n \geq 3$ nous donne que $\ell \geq 3$). La suite n'est donc pas majorée, comme elle est croissante, il suit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

(10) Le programme permettant de calculer et affiche le rang n du premier terme de la suite vérifiant $u_n \geq 10^5$ est très classique à écrire. En voici une version

```
u=3;
n=0;
while u<=10^5
    u=exp(u)-u*exp(1/u);
    n=n+1;
end
disp(n)
```

(11) On utilise la minoration de u_n par $3e^n$ pour obtenir

$$\frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{3e^k}.$$

Puis un argument de comparaison pour les séries à termes positifs. En effet, $(1/e^k)$ est le terme général d'une série géométrique convergente et par comparaison (tous les termes de (u_n) étant strictement positifs), la série $\sum(1/u_k)$ converge.

Exercice 2. (D'après **ECRICOME 2017**)

Partie A

(1) Les tirages ayant lieu avec remise, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il est clair que X_k suit la (même) loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$. On en connait l'espérance $E(X_k) = (n+1)/2$.

(2) (a) Chaque tirage rapportant un nombre entre 1 et n, la somme de n tels nombres ne peut être supérieure à n dès le premier tirage, et dans le pire des cas atteint n après l'obtention de n fois la boule numéro 1. On a alors $T_n(\Omega) = [\![1;n]\!]$.

(b) $T_n = 1$ signifie qu'on obtient la boule numérotée n dès le premier tirage, ce qui se produit avec probabilité $1/n$. Ainsi,

$$P(T_n = 1) = \frac{1}{n}.$$

(c) $P(T_n = n)$ signifie qu'on a obtenu des 1 au cours des $n-1$ premiers tirages, le $n-$ième tirage permettant nécessairement de dépasser un total de n (car, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $n - 1 + k \geq n$). Chaque tirage étant indépendant des précédents, on a

$$P(T_n = n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1}(X_k = 1)\right) = \prod_{k=1}^{n-1} P(X_k = 1) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

(3) On suppose dans cette question que $n = 2$. D'après ce qu'on a vu précédemment, on a $T_2(\Omega) = \{1;2\}$, $P(T_2 = 1) = 1/2$ et $P(T_2 = 2) = 1/2$. On retrouve la loi uniforme sur $[\![1;2]\!]$.

(4) On prend maintenant $n = 3$. On a alors $T_3(\Omega) = \{1;2;3\}$. Toujours d'après les questions précédentes,

$$P(T_3 = 1) = \frac{1}{3}, \quad \text{et} \quad P(T_3 = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

On en déduit que

$$P(T_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

Il suit que

$$E(T_3) = \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{16}{9},$$

ce qui est bien le résultat attendu.

Partie B

(5) La somme de k nombres compris entre 1 et n donne un nombre entre k et nk. Ainsi, $S_k(\Omega) = [\![k; nk]\!]$.

(6) Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$ fixé.

(a) Il est clair que $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$.

(b) Comme S_k est une variable aléatoire, la famille d'évènements $\{(S_k = j) : \ j \in [\![k; nk]\!]\}$ forme un système complet d'évènements. Par la formule des probabilités totales, pour tout $i \in [\![k+1; n(k+1)]\!]$,

$$\begin{aligned} P(S_{k+1} = i) &= \sum_{j=k}^{nk} P\left(S_{k+1} = i | S_k = j\right) P(S_k = j) \\ &= \sum_{j=k}^{nk} P\left(X_{k+1} = i - j\right) P(S_k = j) \\ &= \sum_{j=k}^{i-1} P\left(X_{k+1} = i - j\right) P(S_k = j) \qquad (\text{car } P(X_{k+1} = i - j) = 0 \text{ si } i - j > n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j) \qquad (\text{car } X_{k+1} \hookrightarrow ([\![1; n]\!])) \end{aligned}$$

(7) (a) La formule du triangle de Pascal donne

$$\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}.$$

(b) C'est une récurrence classique sur $i \geq 2$ et $1 \leq k \leq i-1$ mais dont la preuve nécessite d'être rigoureux. Pour $i = 2$ et $k = 1$

$$\sum_{j=1}^{1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{0}{0} = 1 \binom{1}{1} = \binom{i-1}{k},$$

et la propriété est initialisée. Supposons alors que la propriété est vraie pour un certain $i \geq 2$ et pour tout k entre 1 et $i-1$. Montrons qu'elle reste vraie pour $i+1$ et tout k entre 1 et i. On distingue alors deux cas:

- Si $k = i$:

$$\sum_{j=k}^{i} \binom{j-1}{k-1} = \sum_{j=i}^{i} \binom{j-1}{i-1} = \binom{i-1}{i-1} = 1 = \binom{i}{i},$$

et on a bien la formule attendue;

- Si $1 \leq k \leq i-1$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^{i} \binom{j-1}{k-1} &= \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k-1} \\ &= \binom{i-1}{k} + \binom{j-1}{k-1} \qquad (\text{Par HR}) \\ &= \binom{i}{k} \qquad (\text{Par le triangle de Pascal}) \end{aligned}$$

et la récurrence est bien démontrée.

(c) Pour $k = 1$, la proposition $\mathcal{H}_k$ découle de la loi de S_1 qui est la loi de X_1 et donc la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$. Plus précisément,

$$P(S_1 = i) = \frac{1}{n} = \frac{1}{n^1} \binom{k-1}{0}.$$

Reste donc à vérifier le caractère héréditaire de la propriété. Supposons donc $\mathcal{H}_k$ vraie pour un certain k. D'après la question (6)(b),

$$\begin{aligned}
P(S_{k+1}=i) &= \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k=j) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k}\binom{j-1}{k-1} && \text{(Par HR)} \\
&= \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} \\
&= \frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{k} && \text{(Par la Question (7)}(b)\text{)},
\end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{H}_{k+1}$ et termine la récurrence.

(8) (a) L'évènement $[T_n > k]$ signifie qu'on a besoin d'au moins $k+1$ tirages pour dépasser la valeur n ou, de manière équivalente, qu'après k tirages, le total des nombres obtenus est inférieur ou égal à $n-1$, ce qui est exactement l'évènement $[S_k \leq n-1]$. Ainsi,

$$[S_k \leq n-1] = [T_n > k].$$

(b) Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Il découle de la question précédente que

$$\begin{aligned}
P(T_n > k) &= P(S_k \leq n-1) = \sum_{i=k}^{n-1} P(S_k = i) \\
&= \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} \\
&= \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} && \text{(Par la Question (7)}(b)\text{)}
\end{aligned}$$

et on a bien la formule attendue.

(9) La première formule est une formule classique, à savoir démontrer. Elle repose sur le fait que

$$P(T_n = k) = P(T_n > k-1) - P(T_n > k)$$

et sur un décalage d'indice. C'est un peu une "intégration par parties discrètes".

$$\begin{aligned}
E(T_n) &= \sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left(P(T_n > k-1) - P(T_n > k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} kP(T_n > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P(T_n > k) - \sum_{k=1}^{n} kP(T_n > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k) + \sum_{k=0}^{n-1} kP(T_n > k) - \sum_{k=1}^{n} kP(T_n > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k) - P(T_n > n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k),
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait (car $P(T_n > n) = 0$). On injecte alors le résultat de la question précédente:

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1},$$

par la formule du binôme.

(10) Une fois de plus, cette limite est une question classique, déjà vue en classe:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} &= \exp\left((n-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\
&\longrightarrow e, \quad n \to +\infty.
\end{aligned}$$

En d'autres termes,

$$\lim_{n \to +\infty} E(T_n) = e.$$

(11) Le programme à compléter ne présente aucune difficulté. On en présente une version commentée ci-dessous:

```
function y=T(n)
    S=grand(1,1,'uin',1,n); //total initialisé à première boule tirée
    y=1; //nombre de tirages initialisé
    while S<n
        S=S+grand(1,1,'uin', 1, n); //on rajoute un numéro de boule
        y=y+1; //on a fait un tirage de plus
    end
endfunction
```

Exercice 3. Dans tout l'exercice, on considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie A : Étude de la matrice A

(1) On commence par expliciter la matrice $A - I$ avant de calculer ses puissances:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il apparaît alors que

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad (A-I)^3 = 0.$$

(2) Il découle de la question précédente que le polynôme $(X-1)^3$ annule A. Les valeurs propres de A sont donc nécessairement les racines de ce polynôme qui n'en admet qu'une: 1.

(3) Si A était diagonalisable, sa matrice dans une base de vecteurs propres serait, d'après la question précédente, l'identité, mais alors, cette dernière commutant avec la matrice de passage (et avec son inverse), finalement A serait l'identité, ce qui n'est pas le cas. Elle n'est donc pas diagonalisable. En revanche, 0 n'étant pas valeur propre, le noyau de l'endomorphisme associé à A est réduit au vecteur nul; il est donc bijectif et A est inversible.

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note, pour tout $x \in]-1;1[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

(4) Pour tout $x \in]-1;1[$, $1 + x > 0$, or la fonction racine est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (donc en particulier $\mathcal{C}^2$) sur cet intervalle. Par composition, φ est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1;1[$. Pour tout x s'y trouvant, on a

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \qquad \varphi''(x) = \frac{-1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}.$$

En particulier,

$$\varphi'(0) = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \varphi''(0) = -\frac{1}{4}.$$

(5) D'après les formules de Taylor, φ étant de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0, elle admet un développement limité d'ordre 2 donné par

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2!}x^2 + x^2\varepsilon(x) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\alpha = -1/8$.

(6) On considère donc la fonction polynomiale P de degré 2 défini par

$$P(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

Un développement trivial donne

$$(P(x)^2) = 1 + x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64}.$$

(7) En notant alors $C = A - I$, la toute première question s'exprime comme $C^3 = 0$ (il en est de même pour toutes les puissances supérieures). Ainsi,

$$P(C)^2 = I + C - \frac{1}{8}C^3 + \frac{1}{64}C^4 = I + C = A.$$

En posant $M = P(C)$, on a clairement $M^2 = A$. Les coefficients explicites de M sont les suivants

$$\begin{aligned} M &= P(C) = I + \frac{1}{2}C - \frac{1}{8}C^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Partie C - Résolution complète de l'équation

Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est la matrice A.

(9) Soient u, v et w les vecteurs définis par $\left\{ \begin{array}{rcl} w &=& (1,0,1) = e_1 + e_3 \\ v &=& f(w) - w \\ u &=& f(v) - v \end{array} \right.$.

(a) On calcule

$$\begin{aligned} v &= f(w) - w \\ &= Cw \\ &= (1, 1, -3) \\ u &= f(v) - v \\ &= f(f(w) - w) + f(w) - w = f^2(w) - w = C^2 w \\ &= (-6, -6, 0) \end{aligned}$$

(b) Pour montrer que la famille $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que ces trois vecteurs forment une famille libre. Soient alors $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $xu + yv + zw = 0$. Il suffit de montrer que, nécessairement, $x = y = z = 0$. On résout donc le système, par pivot de Gauss,

$$\begin{aligned} xu + yv + zw = 0 &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -6x + y + z &=& 0 \\ -6x + y &=& 0 \\ -3y + z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -6x + y + z &=& 0 \\ z &=& 0 \\ -3y + z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff x = y = z = 0 \end{aligned}$$

et la famille $\mathcal{B}'$ est bien libre et forme donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Pour connaître la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, il faut exprimer les images, par f, des vecteurs de $\mathcal{B}'$ en fonction de ces mêmes vecteurs. La définition des vecteurs donne la décomposition souhaitée

$$\begin{aligned} u = f(v) - v &\iff f(v) = u + v \\ v = f(w) - w &\iff f(w) = v + w \\ u = (-6, -6, 0) &\implies f(u) = A \cdot u = (-6, -6, 0) = u. \end{aligned}$$

Il suit alors que,

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.$$

(d) Si on introduit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base canonique, alors $P = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ est inversible et ses colonnes sont les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base canonique

$$P = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}(\mathcal{B}', \mathcal{B}),$$

(qui est bien inversible car les colonnes qui la composent forment une base de $\mathbb{R}^3$) on a bien

$$T = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \mathrm{Id}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})\mathrm{Id}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = P^{-1}AP.$$

(10) Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Si on suppose que $N^2 = T$, alors $NT = N^2 \cdot N = N^3 = N \cdot N^2 = NT$. En d'autres termes, N et T commutent. En notant

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

on a

$$NT = TN \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & a+d \\ a+b & = & b+e \\ b+c & = & c+f \\ d & = & d+g \\ d+e & = & e+h \\ e+f & = & f+i \\ g & = & g \\ g+h & = & h \\ h+i & = & i \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & e \\ d & = & 0 \\ b & = & f \\ g & = & 0 \\ e & = & i \\ g & = & 0 \\ h & = & 0 \end{array} \right. ,$$

ce qui donne bien

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(b) Il est alors facile de résoudre l'équation cherchée

$$N^2 = T \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 1 \\ 2ab & = & 1 \\ b^2 + 2ac & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \pm 1 \\ b & = & 1/2a \\ c & = & -1/8 \end{array} \right.$$

et on a deux solutions:

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad N_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & -1/8 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(11) On utilise le fait que $T = P^{-1}AP$ ce qui, étant équivalent à $A = PTP^{-1}$, donne

$$\begin{aligned}
M^2 = A &\iff M^2 = PTP^{-1} \\
&\iff P^{-1}M^2P = T \\
&\iff \left(P^{-1}MP\right)^2 = T \\
&\iff P^{-1}MP = N_1 \quad \text{ou} \quad P^{-1}MP = N_2 \\
&\iff M = PN_1P^{-1} \quad \text{ou} \quad M = PN_2P^{-1}
\end{aligned}$$

et on a bien exhibé les deux solutions souhaitées.

(12) Il est facile de voir que l'ensemble des solutions n'est pas un sous-espace vectoriel (de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$). Il existe une multitude de contre-arguments. Le plus simple est de mentionner que la matrice nulle n'en est pas un élément.