ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°3

Durée: 4 heures

---

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées**. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1. (*Les questions de cet exercice sont indépendantes*)

(1) Soit $f:\ x \mapsto \ln(-x^2+x+2)$.

(a) Préciser le domaine de définition de f.

(b) Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;2[$ et que, pour tout x s'y trouvant
$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}.$$

(c) En déduire que, pour tout $x \in [0;1]$, on a
$$-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}.$$

(d) Montrer enfin que, pour tout $x \in [0;1]$,
$$|f(x) - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|x-1|.$$

(2) Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2 2^{n-1}}{3^{n+1}}$.

(3) Après avoir justifié que justifier que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$, montrer la convergence absolue de la série
$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n^2+n-1}{n^2+n+1}\right).$$

(4) Compléter la fonction `SciLab` ci-dessous afin qu'elle renvoie la matrice $((-1)^{i+j})_{1\leq i,j\leq n}$ où n est l'unique argument de la fonction

```
function M=matrice(n)
    M=zeros(1,............)
    for i=................
        for j=..................
            ....................
        end
    end
endfunction
```

Exercice 2. (Probabilités et récurrences matricielles)

Partie 1 : Relations entre matrices.

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer P^2 puis en déduire que P est inversible et la valeur de P^{-1}.
(2) Montrer que $P^{-1} \cdot J \cdot P$ et $P^{-1} \cdot K \cdot P$ sont diagonales.
(3) En déduire une matrice $D(\alpha, \beta)$ diagonale telle que $\alpha J + \beta K = P \cdot D(\alpha, \beta) \cdot P^{-1}$

Partie 2 : Étude d'un mouvement aléatoire.

Dans cette partie, p désigne un réel de $[0, 1[$.

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

Un pion se déplace sur les sommets du carré selon le protocole suivant:

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin(relié par un côté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1 - 2p$.

On s'intéresse, pour $n \in \mathbb{N}$, aux évènements A_n "le pion est sur le sommet n°1 après n déplacements", B_n "... sur le somment n°2...", C_n "... sur le sommet n°3..." et D_n "... sur le somment n°4..." et a_n, b_n, c_n, d_n les probabilités correspondantes. On admet que, pour tout $n \geq 2$, $\{A_n, B_n, C_n, D_n\}$ forme un système complet d'évènements.

On note

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}.$$

(4) Que vaut U_0? Déterminer U_1.
(5) Déterminer une matrice A telle que, pour tout $n \geq 2$, on ait $U_{n+1} = AU_n$. Vérifier que cette égalité a lieu pour $n = 0$ et $n = 1$.
(6) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$U_n = A^n U_0.$$

(7) Vérifier que A s'écrit comme combinaison linéaire de J et K. (i.e qu'il existe des réels α et β telq que $A = \alpha J + \beta K$).
(8) En déduire que

$$U_n = \frac{1}{4} P \cdot D(p, 1-2p)^n \, PC_0,$$

où $D(p, 1-2p)$ est la matrice trouvée au 3 puis donner l'expression de U_n en fonction de n, pour tout $n \geq 1$.

Exercice 3. (Suites récurrentes)

Partie 1 - Résolution numérique de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ $(0 < x < 1)$.

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

(1) (a) Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine réelle appartenant à $]0,1[$, et préciser la valeur de cette racine r_2.
(b) En déduire que r_2 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $]0,1[$.

(2) Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/2, 1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/2, 1]$.
(3) Calculer la dérivée f' de f et prouver l'inégalité suivante pour $1/2 \leq x \leq 1$

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$

(4) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer que pour tout entier n, $u_n \in [1/2, 1]$.
(b) Prouver l'inégalité suivante et la convergence de la suite (u_n) vers r_2

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Partie 2 - Résolution numérique de l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ $(0 < x < 1)$.

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

(5) Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine réelle r_3 appartenant à $]0,1[$.

(6) Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/3, 1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/3, 1]$.

(7) Calculer les dérivées f' et f'' de f et en déduire le maximum de la valeur absolue de $f'(x)$ pour x appartenant à $[1/3, 1]$.

(8) On considère la suite défnie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Majorer $|u_n - r_3|$ en fonction de n et prouver la convergence de la suite (u_n) vers r_3.
(b) Écrire un programme en `SciLab` qui donne une valeur approchée de r_3 à 10^{-8} près.

☞ **Tourner la page S.V.P**

Exercice 4. (Une suite implicite)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la formule ci-dessous et C_n sa courbe représentative.

$$f_n = \begin{cases} xe^{-n/x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Partie 1 - Étude des fonctions f_n

(1) Montrer que f_n est continue à droite en 0.
(2) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur de $(f_n)'_d(0)$.
(3) La fonction f_n est-elle dérivable à gauche en 0? Que peut-on en déduire concernant C_n?
(4) Montrer que f_n est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel x non nul, calculer $f_n'(x)$ puis étudier son signe.
(5) Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^-, puis donner le tableau de variations de f_n.

(6) (*Cette question est facultative.*) On rappelle le développement limité à l'ordre 2 de $\exp(u)$ au voisinage de $u = 0$

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

(a) Montrer que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$, on a

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

(b) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, ainsi qu'au voisinage de $-\infty$, C_n admet une asymptote oblique D_n dont on donnera une équation. Préciser la position relative de D_n et C_n aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

Partie 2 - Un équivalent d'une suite implicite

(7) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.
(8) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n est strictement supérieur à 1 et que u_n est solution de l'équation

$$(E_n) \qquad x \ln(x) = n.$$

(9) Étudier la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x \ln(x)$. En déduire, en utilisant la fonction g^{-1} dont on justifiera l'existence, que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

(10) Justifier la relation $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$, puis montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} = 1.$$

(11) En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n \times \frac{\ln(n)}{n} = 1.$$

On a alors trouvé un équivalent en $+\infty$ pour la suite (u_n):

$$u_n \sim \frac{n}{\ln(n)}$$