ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°3

Solution

Exercice 1. (*Les questions de cet exercice sont indépendantes*)

(1) Soit $f:\ x \mapsto \ln(-x^2+x+2)$.

(a) Le polynome à l'intérieur du logarithme a pour racine -1 et 2 et il est strictement positif entre ces deux racines, donc $\mathcal{D}_f =]-1;2[$.

(b) Sur $]-1;2[$, f est la composée du logarithme et d'un polynôme strictement positif. Tout polynôme, ainsi que le log, étant $\mathcal{C}^1$, f l'est aussi. De plus, les formules connues par coeur depuis la plus tendre enfance permettent de voir que, pour tout x s'y trouvant,

$$f'(x) = \frac{-2x+1}{-x^2+x+2} = \frac{2x-1}{x^2-x-2}.$$

En mettant au même dénominateur la quantité à retrouver, on voit que

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} = \frac{2x+1}{(x+1)(x-2)} = \frac{2x+1}{x^2-x-2} = f'(x)$$

et on est tout bon.

(c) Prenons $x \in [0;1]$. On a alors

$$1 \leq x+1 \leq 2 \qquad \text{et} \qquad -2 \leq x-2 \leq -1$$

donc, par passage à l'inverser

$$1 \geq \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{2} \geq \frac{1}{x-2} \geq -1$$

ce qui donne bien

$$-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}.$$

(d) En remarquant que $\ln(2) = f(1)$, il suffit d'appliquer l'IAF entre 1 et x, car f est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$. D'après la question précédente, $|f'(x)| \leq 1/2$, pour tout x dans l'intervalle susnommé donc

$$|f(x) - \ln(2)| = |f(x) - f(1)| \leq \frac{1}{2}|x-1|.$$

(2) Pour montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 0} n^2 2^{n-1}/3^{n+1}$, on travaille sur son terme général. En effet, on voit que

$$\frac{n^2 2^{n-1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3^3} \times n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{3^2} \times n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

On reconnait alors la combinaison des séries géométriques dérivées de raison 2/3 donc convergentes. Ainsi, la série que l'on étudie converge et sa somme est égale à la combinaison des sommes des séries susmentionnées. On obtient donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 2^{n-1}}{3^{n+1}} &= \frac{2}{3^3} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{3^2}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\ &= \frac{2}{3^3} \times \frac{2}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^3} + \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}\\ &= \frac{2}{3^3} \times (2 \times 3^3) + \frac{1}{3^2} \times 3^2\\ &= 5.\end{aligned}$$

(3) Par concavité de la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ (ce qu'on peut voir par le signe de sa dérivée seconde), la courbe de celle-ci se situe au-dessous de chacune de ses tangentes, en particulier $y = x$, tangente en $x = 0$. Ce qui donne bien l'inégalité demandée. On constate de plus que

$$\left|\ln\left(\frac{n^2+n-1}{n^2+n+1}\right)\right| = -\ln\left(\frac{n^2+n-1}{n^2+n+1}\right) = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{n^2+n-1}\right) \leq \frac{2}{n^2+n-1} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Par comparaison à une série de Riemann convergente, on a bien la convergence demandée.

(4) On complète cette fonction, déjà rencontré dans le TP n°4:

```
function M=matrice(n)
    M=zeros(1,n)
    for i=1:n
        for j=1:n
          M(i,j)=(-1)^(i+j);
        end
    end
endfunction
```

Exercice 2. (D'après **EDHEC 2002**)

Partie 1 : Relations entre matrices.

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

(1) On constate que $P^2 = 4I$ ce qui donne $P \cdot \frac{1}{4}P = I$ et donc P est inversible avec

$$P^{-1} = \frac{1}{4}P.$$

(2) On calcule les produits :

$$\begin{aligned}P^{-1}\cdot J \cdot P &= \frac{1}{4}P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = D_1\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P^{-1}\cdot K\cdot P &= \frac{1}{4}P\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\\1&1&1&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=D_2
\end{aligned}
$$

sont bien diagonales.

(3) On a donc $P^{-1}\cdot J\cdot P=D_1$ et $J=P\cdot D_1\cdot P^{-1}$ et $K=P\cdot D_2\cdot P^{-1}$ donc

$$\alpha J+\beta K=\alpha P\cdot D_1\cdot P^{-1}+\beta P\cdot D_2\cdot P^{-1}=P\cdot(\alpha D_1+\beta D_2)\cdot P^{-1}$$

et

$$D(\alpha,\beta)=\alpha D_1+\beta D_2=\begin{pmatrix}2\alpha+\beta&0&0&0\\0&-2\alpha+\beta&0&0\\0&0&-\beta&0\\0&0&0&-\beta\end{pmatrix}$$

est bien diagonale.

Partie 2 : Étude d'un mouvement aléatoire.

Dans cette partie, p désigne un réel de $[0,1[$.

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

Un pion se déplace sur les sommets du carré selon le protocole suivant:

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin(relié par un côté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1-2p$.

On s'intéresse, pour $n\in\mathbb{N}$, aux évènements A_n "le pion est sur le somment n°1 après n déplacements", B_n "... sur le somment n°2...", C_n "... sur le sommet n°3..." et D_n "... sur le somment n°4..." et a_n,b_n,c_n,d_n les probabilités correspondantes. On admet que, pour tout $n\geq 2$, $\{A_n,B_n,C_n,D_n\}$ forme un système complet d'évènements.

(4) Comme, au départ, le pion est sur le sommet n°1, on a $a_0=1$ et $b_0=c_0=d_0=0$ ou encore

$$U_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Au moment $n=1$, partant du sommet n°1, le pion a une probabilité p d'être sur le sommet n°2 ou n°4 (sommets voisins) et une probabilité $1-2p$ d'être sur le sommet n°3 (sommet opposé). La proabilité est nulle de rester sur le sommet n°1. Donc

$$U_1=\begin{pmatrix}0\\p\\1-2p\\p\end{pmatrix}$$

(5) On admet que, pour $n \geq 2$, $\{A_n, B_n, C_n, D_n\}$ forme un système complet d'évènements. En lui appliquant la formule des probabilités totales et en utilisant les règles de déplacements décrites ci-dessus pour exprimer les probabilités conditionnelles ci-dessous, on obtient

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) + P_{D_n}(A_{n+1})P(D_n) \\ &= 0 \times a_n + p \times b_n + (1-2p) \times c_n + p \times d_n \\ &= pb_n + (1-2p)c_n + pd_n. \end{aligned}$$

Le même raisonnement donne

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= pa_n + pc_n + (1-2p)d_n \\ c_{n+1} &= (1-2p)a_n + pb_n + pd_n \\ d_{n+1} &= pa_n + (1-2p)b_n + pc_n. \end{aligned}$$

Utilisant les règles du produit matriciel, on trouve sans difficulté que $U_{n+1} = AU_n$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-2p & p \\ p & 0 & p & 1-2p \\ 1-2p & p & 0 & p \\ p & 1-2p & p & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que l'égalité matricielle a bien lieu pour $n = 0$ et $n = 1$. Pour $n = 0$, on a bien

$$\begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 1-2p \\ p \end{pmatrix} = U_1 = A = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-2p & p \\ p & 0 & p & 1-2p \\ 1-2p & p & 0 & p \\ p & 1-2p & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = AU_0.$$

Pour $n = 1$, on doit vérifier que $U_2 = AU_1$. On doit d'abord déterminer U_2. Attention, $\{A_1, B_1, C_1, D_1\}$ n'est pas un s.c.e, car on sait que $A_1 = \emptyset$. En revanche, $\{B_1, C_1, D_1\}$ est un s.c.e. En lui appliquant la formule des probabilités totales, comme précédemment, on trouve

$$\begin{aligned} a_2 &= P(A_2) = P_{B_1}(A_2)P(B_1) + P_{C_1}(A_2)P(C_1) + P_{D_1}(A_2)P(D_1) \\ &= p^2 + (1-2p)^2 + p^2 \\[2em] b_2 &= 2p(1-2p) \\[2em] c_2 &= 2p^2 \\[2em] d_2 &= 2p(1-2p) \end{aligned}$$

et on a bien

$$U_2 = \begin{pmatrix} p^2 + (1-2p)^2 + p^2 \\ 2p(1-2p) \\ 2p^2 \\ 2p(1-2p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-2p & p \\ p & 0 & p & 1-2p \\ 1-2p & p & 0 & p \\ p & 1-2p & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 1-2p \\ p \end{pmatrix} = AU_1.$$

(6) C'est une récurrence très facile. Pour $n = 0$, on a trivialement $u_0 = A^0 U_0 = IU_0 = U_0$. Si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = A^n U_0$, alors, par la question précédente

$$U_{n+1} = AU_n = A \cdot A^n U_0 = A^{n+1} U_0,$$

et la récurrence est terminée.

(7) On voit immédiatement que

$$A = pJ + (1-2p)K.$$

(8) Par la première partie, on peut alors déduire que
$$A = PD(p, 1-2p)P^{-1}.$$
Une récurrence immédiate, combinée au fait que $P^{-1} = (1/4)P$ mène alors à
$$A^n = pD(p, 1-2p)^n P^{-1} = \frac{1}{4} PD(p, 1-2p)^n P.$$
Comme, par la question précédente, $U_n = A^n U_0$, on a bien
$$U_n = \frac{1}{4} P \cdot D\left(p, 1-2p\right)^n PU_0,$$
et on peut écrire
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-4p)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2p-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Et on a finalement
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4}\left[1 + (1-4p)^n + 2\left(2p-1\right)^n\right] \\ b_n &= \frac{1}{4}\quad\left[1 - (1-4p)^n\right] \\ c_n &= \frac{1}{4}\left[1 + (1-4p)^n - 2\left(2p-1\right)^n\right] \\ d_n &= \frac{1}{4}\left[1 - (1-4p)^n\right] \end{aligned}$$

Exercice 3. (D'après **ESSEC 2002**)

Partie I - Résolution numérique de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ $(0 < x < 1)$.

(1) (a) L'équation $x^2 + x - 1 = 0$ se résout via le calcul de son discriminant. On trouve $\Delta = 5$ et il y a donc deux solutions réelles qui sont $r = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. Une seule des deux est bien un élément de $]0;1[$, il s'agit de $r_2 = (-1+\sqrt{5})/2$. Comme $\sqrt{5} \geq 2$, on a même que $r_2 \in [1/2; 1]$.

(b) Par ailleurs, il apparaît que
$$f(x) = x \iff \frac{1}{x+1} = x \iff 1 = x^2 + x \iff x^2 + x - 1 = 0,$$
et donc r_2 est bien l'unique point fixe de f dans $]0;1[$.

(2) Pour montrer la stabilité de l'intervalle $[1/2; 1]$ sous l'action de f, il faut commencer par déterminer les variations de f. Cette dernière est bien entendu dérivable sur $]0;1[$ (comme inverse d'un polynôme qui ne s'y annule pas) et on a
$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$$
et f est strictement décroissante. Ainsi, si $1/2 \leq x \leq 1$, on aura nécessairement
$$\frac{1}{2} = f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} < 1.$$

(3) D'après les calculs établis à la question précédente, on a, pour tout $x \in [1/2; 1]$,
$$|f'(x)| = \left|\frac{-1}{(x+1)^2}\right| = \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{4}{9},$$
car la fonction $x \mapsto 1/(x+1)^2$ est décroissante et son maximum sur $[1/2; 1]$ est alors atteint en $x = 1/2$.

(4) En utilisant la stabilité de $[1/2;1]$ par f obtenue à la question (b), une récurrence immédiate et très facile permet de voir que tous les termes de la suite (u_n) sont bien des éléments de l'intervalle. On va donc montrer l'inégalité voulue par une autre récurrence en utilisant l'inégalité des accroissements finis (IAF). Pour $n=0$, on a $|u_0-r_2|=(3-\sqrt{5})/2\leq 1$ car $2\leq\sqrt{5}\leq 3$.

Supposons alors que, pour un certain entier $n\geq 0$, $|u_n-r_2|\leq(4/9)^n$ (HR). On a alors

$$\begin{aligned}|u_{n+1}-r_2| &= |f(u_n)-f(r_2)|\\ &\leq \frac{4}{9}|u_n-r_2| \qquad \text{(par IAF)}\\ &\leq \frac{4}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n \qquad \text{(par HR)}\\ &= \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1},\end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence. On a pu appliquer l'IAF car (et il faut absolument le mentionner) tous les termes de la suite ainsi que r_2 sont des éléments de $[1/2;1]$ et que $|f'|$ y est majoré par $4/9$.

Comme $|4/9|<1$, $(4/9)^n\longrightarrow 0, n\to+\infty$ et, par le théorème des gendarmes, u_n-r_2 tend vers 0 ou encore

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=r_2.$$

Partie II - Résolution numérique de l'équation $x^3+x^2+x-1=0$ $(0<x<1)$.

(5) Notons g la fonction définie (et continue et dérivable - comme polynôme) sur $]0;1[$ par $g(x)=x^3+x^2+x-1$. La dérivée de g est égale à $g'(x)=3x^2+2x+1$ qui est une fonction polynomiale de degré 2, de discriminant strictement négatif et donc de signe constant strictement positif. Ainsi, g est strictement croissante. Par le théorème de bijection, g réalise une bijection de $]0;1[$ sur $]g(0);g(1)[=]-1;2[$. Comme 0 en est un élément, il en existe un unique antécédent r_3 par g.

(6) Soit $x\in[1/3;1]$. On raisonne par équivalences successives sur les encadrements (on pourrait aussi dériver et regarder les variations, mais on déteste la routine).

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\leq x\leq 1 &\iff \frac{13}{9}=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+1\leq x^2+x+1\leq 1^2+1+1=3\\ &\iff \frac{1}{3}\leq\frac{1}{x^2+x+1}\leq\frac{9}{13}\\ &\implies \frac{1}{3}\leq f(x)\leq 1,\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(7) f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc sur $]0;1[$) comme inverse d'un polynôme qui ne s'annule jamais. On obtient:

$$f'(x)=-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$$

et

$$f''(x)=-\frac{2(x^2+x+1)^2-2(2x+1)^2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^4}=2\frac{3x(x+1)}{(x^2+x+1)^3}.$$

Il est facile de dresser le tableau de variations de f':

x	$1/3$		1
$f''(x)$		$+$	
f'	$\frac{-135}{169}$	$\nearrow$	$-\frac{1}{3}$

En particulier, $f'(x) \geq f'\left(\frac{1}{3}\right) = -135/169$ et donc $|f'(x)| = -f'(x) \leq 135/169$.

(8) (a) On ré-applique le raisonnement précédent. Une première récurrence immédiate permet de voir que, par stabilité de $[1/3;1]$ sous l'action de f, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[1/3;1]$. On remarque que r_3 est le seul point fixe de f dans ce même intervalle (comme $g(1/3) = -14/27 < 0$, on a bien $r_3 > 1/3$). On peut donc appliquer l'IAF pour obtenir $|u_{n+1} - r_3| \leq (135/169)|u_n - r_3|$. La même récurrence que précédemment donne alors
$$|u_n - r_3| \leq \left(\frac{135}{169}\right)^n$$
car $|u_0 - r_3| = 1 - r_3 \leq 2/3 \leq 1$. Comme $(135/169)^n \longrightarrow 0$, on a encore
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = r_3.$$

(b) Une valeur approchée de r_3 à 10^{-8} sera donnée par u_n dès lors que n est tel que $(135/169)^n \leq 10^{-8}$. Le script est donc le suivant:

```
u=1;
n=0;
while (135/169)^n>=10^(-8)
    u=1/(u^2+u+1);
    n=n+1;
end
disp(u)
```

Exercice 4. (D'après **EDHEC 2004**)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la formule ci-dessous et C_n sa courbe représentative.
$$f_n = \begin{cases} xe^{-n/x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Partie 1 - Étude des fonctions f_n

(1) Lorsque $x \to 0^+$, $n/x \to +\infty$, donc $-n/x \to -\infty$ et l'exponentielle du tout tend vers 0. Ainsi, $f_n(x) \to 0 = f_n(0)$ et f_n est bien continue à droite en 0.

(2) Il faut calculer la limite (à droite) du taux d'accroissement
$$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = \frac{xe^{-n/x}}{x} = e^{-n/x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$$
Ainsi, f_n est bien dérivable à droite en 0 et $(f_n)'_d(0) = 0$.

(3) La fonction f_n n'est pas continue à gauche (sa limite lorsque $x \to 0^-$ vaut $-\infty$), elle n'est en particulier pas dérivable et la courbe c_n présente une asymptote verticale à gauche en 0.

(4) La fonction $x \mapsto -n/x$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Par composition avec l'exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$ et produit avec $x \mapsto x$ ayant la même propriété, f_n est bien dérivable sur chacun des deux intervalles précédents. De plus,pour tout réel x non nul, on a

$$f_n'(x) = e^{-n/x} + x \times \left(\frac{n}{x^2}\right) e^{-n/x} = \frac{x+n}{x} e^{-n/x},$$

expression dont il est facile d'obtenir le signe

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

(5) Comme $e^{-n/x} \to 1$, $x \to \pm\infty$, il est clair que $f_n(x) \to \pm\infty$, $x \to \pm\infty$ par algèbre des limites. On a déjà dit que $f_n(x) \to -\infty$, $x \to 0^-$ (par croissance comparée). Le signe de la dérivée ci-dessus nous permet de dresser le tableau de variations

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$-ne$	$\searrow$	$-\infty \; \Vert \; 0$	$\nearrow$	$+\infty$

(6) (*Cette question est facultative.*) On rappelle le développement limité à l'ordre 2 de $\exp(u)$ au voisinage de $u = 0$

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

(a) Le DL rappelé ci dessus permet d'écrire (car $-x/n \to 0$, $x \to \pm\infty$) que, pour $x \to \pm\infty$,

$$e^{-n/x} = 1 - \frac{n}{x} + \frac{n^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

En multipliant par x on obtient bien

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

(b) Il est alors clair, par la question précédente, que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_n(x) - (x - n) = 0,$$

ce qui se traduit par le fait que C_n admet une asymptote oblique D_n d'équation $y = x - n$ en $\pm\infty$. Comme $f_n(x) - (x - n) = n^2/2x + o(1/x)$, on peut déterminer le signe de la différence et la position de C_n par rapport à D_n: quand $x \to +\infty$, $n^2/2x > 0$ donc C_n est au dessus de D_n. Lorsque $x \to -\infty$, $n^2/2x < 0$ et C_n est au dessous de D_n.

Partie 2 - Un équivalent d'une suite implicite

(7) D'après l'étude précédente, pour tout $x < 0$, $f_n(x) < 0$ donc une solution à l'équation $f_n(x) = 1$ ne peut être que positive. On applique alors le théorème de bijection: f_n est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme $1 \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = 1$ admet donc une unique solution u_n (ou encore 1 admet un unique antécédent u_n dans $\mathbb{R}_+$ par f_n).

(8) On voit que $f_n(1) = e^{-n} < 1 = f_n(u_n)$. Par stricte croissance de f_n, il suit que $u_n > 1$. De plus, en passant au logarithme

$$\begin{aligned} f_n(u_n) = 1 &\iff u_n \exp(-n/u_n) = 1 \\ &\iff \ln(u_n) - n/u_n = 0 \iff u_n \ln(u_n) - n = 0 \\ &\iff u_n \ln(u_n) = n \\ &\iff u_n \text{ solution de } (E_n) \end{aligned}$$

(9) La fonction g est définie, (continue et) dérivable sur $[1; +\infty[$ comme produit de fonctions usuelles dérivables. On a, pour $x \geq 1$, $g'(x) = \ln(x) + 1 > 0$. Donc g est strictement croissante. Par le théorème de bijection, elle en réalise une de $[1; +\infty[$ sur $[g(1); \lim_{+\infty} g[= [0; +\infty[$. Par le même théorème, la bijection réciproque g^{-1} suit les mêmes variations que g et est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus

$$u_n \text{ solution de } E_n \iff g(u_n) = n \iff u_n = g^{-1}(n).$$

Par continuité de g^{-1} sur $\mathbb{R}_+$ et comme $g(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} g^{-1}(n) = +\infty.$$

(10) On sait que $u_n \ln(u_n) = n$. Or, comme $u_n > 1$, $\ln(u_n) > 0$ et, en prenant le logarithme de cette quantité, on obtient

$$\ln\left(u_n \ln(u_n)\right) = \ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n).$$

Il suit que

$$\ln(u_n)\left(1 + \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)}\right) = \ln(n)$$

ou encore

$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} = \frac{1}{1 + \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)}}.$$

Mais, comme, par croissance comparée

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

et que $\ln(u_n) \to +\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)} = 0$$

et il suit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} = 1.$$

(11) On revient à la définition de u_n

$$\begin{aligned} u_n \ln(u_n) = n &\iff u_n = \frac{n}{\ln(u_n)} \\ &\iff u_n \times \frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} \end{aligned}$$

or, on a vu que le membre de droite tendait vers 1, $n \to +\infty$, à la question précédente, ce qui permet d'écrire que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \times \frac{\ln(n)}{n} = 1.$$