ECE 2 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°4

Durée: 4 heures

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées**. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1. On dit qu'une matrice A carrée de taille n est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel k non nul tel que :

$$A^{k-1} \neq 0_n \quad \text{et} \quad A^k = 0_n,$$

où 0_n représente la matrice carrée nulle d'ordre n. Soit A une matrice carrée de taille n, on dit que le couple (Δ, N) est une *décomposition de Dunford* de A lorsque :

$$\begin{cases} \Delta \text{ est un matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{cases}$$

(1) On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) (a) Déterminer les valeurs propres de A.
(b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(3) On considère les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer les produits ΔX_1, ΔX_2 et ΔX_3.
(b) Justifier que la matrice Δ est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible telle que $P^{-1}\Delta P = D$.

(4) (a) Établir que N est une matrice nilpotente.
(b) Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A.
(c) En utilisant la formule du binôme de Newton que l'on justifiera, donner l'expression de A^n en fonction des puissances de Δ, de N et de n.
(d) Établir que, pour tout entier naturel $k \geq 11$, $\Delta^k N = N$.
(e) Proposer une décomposition de Dunford de A^n.

Exercice 2. Soit T est l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ solutions du système d'inéquations

$$x \geq \frac{1}{4}, \quad y \geq \frac{1}{4}, \quad x+y \leq \frac{3}{4}.$$

On note T' l'*intérieur* de T, à savoir l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ solutions du système d'inéquations

$$x > \frac{1}{4}, \quad y > \frac{1}{4}, \quad x+y < \frac{3}{4}.$$

Soit f la fonction définie sur T par

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x+y}.$$

(1) Représenter, sur un même graphique, les domaines T et T'.

(2) On admet que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
  (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur T', puis déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur T' de la fonction f.
  (b) Montrer que f n'admet pas d'extremum local (et donc *a fortiori* global) sur T'.

(3) Démontrer par de simples considérations sur des inégalités que l'on a pour tout couple (x,y) de T

$$2 \leq f(x,y) \leq \frac{16}{3}.$$

On considère alors une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u). On suppose que

$$p \geq \frac{1}{4}, \qquad r \geq \frac{1}{4}, \qquad u \geq \frac{1}{4}, \qquad \text{et que} \qquad p+r+u=1.$$

On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne **avec remise** entre deux tirages. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement: "On obtient une boule blanche (respectivement rouge, verte) au $n^{ième}$ tirage".

On appelle X (resp Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première blanche (resp rouge) et on définit alors la variable $D = |X-Y|$ égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

(4) Déterminer la loi de X. Faire de même pour Y. En déduire, sans calcul, que X et Y admettent des espérance et préciser $E(X)$ et $E(Y)$.

(5) Soient i et j des entiers naturels non nuls.
  (a) En distinguant les cas $i=j$, $i<j$ et $i>j$, exprimer l'événement $(X=i) \cap (Y=j)$ à l'aide des événements décrits dans l'énoncé.
  (b) En déduire la loi du couple (X,Y).

(6) Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
(7) Soit k un entier naturel non nul, montrer l'égalité:

$$P(D=k) = \frac{pr}{p+r}\left[(1-p)^{k-1} + (1-r)^{k-1}\right].$$

(8) Montrer que D admet une espérance et que $E(D) = f(p,r)$. Encadrer alors $E(D)$.

Exercice 3. On considère la fonction de deux variables f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = 4x^2 - 2xy + 3y^2 + 5.$$

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(2) Déterminer les points critiques de f.
(3) En déduire l'existence d'un unique extremum (local) pour f dont on précisera la valeur.
(4) On souhaite représenter avec `SciLab` la surface $\mathcal{S}_f$, définie par

$$\mathcal{S}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = f(x, y),\ (x, y) \in [-2; 2]^2\}.$$

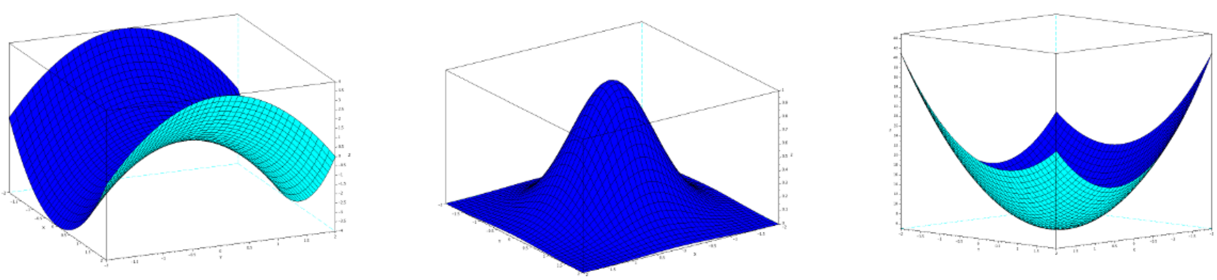
(a) Compléter le programme suivant afin qu'il représente la surface susmentionnée.

```
function z=f(x,y)
    z=................................
endfunction

x=-2:.1:2;
y=.........................
n=.........................
z=zeros(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        ................................
    end
end

plot3d(..........................)
```

(b) L'exécution du programme précédent, correctement complété, affiche l'une des trois figures ci-dessous. Laquelle?



(c) Que peut-on conjecturer à propos de l'extremum précédent?

(5) Pour $y \neq 0$, développer

$$y^2\left(3\frac{x^2}{y^2} + \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2 + 2\right).$$

(6) Interpréter le calcul précédent. Est-ce cohérent avec la réponse donnée à la Question 4c?

Exercice 4. On désigne par λ, un réel strictement positif et on considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}.$$

(1) (a) Montrer que f est paire.
(b) Établir la convergence et calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$$

(c) Montrer que la fonction f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.

(2) (a) Justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x f(x) \, \mathrm{d}x.$$

(b) En déduire que la variable aléatoire X possède une espérance, notée $E(X)$, et donner sa valeur.

(3) (a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^2 f(x) \, \mathrm{d}x$$

converge et donner sa valeur.
(b) En déduire que la variable aléatoire X possède une variance, notée $V(X)$, et donner sa valeur.

(4) On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.
(a) Donner l'expression de la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y à l'aide de la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X .
(b) Déterminer une densité f_Y de Y, puis vérifier que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ .
(c) Retrouver alors sans calcul la valeur de $V(X)$.

(5) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;1[$. On pose $W = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ et on admet que West une variable aléatoire.
(a) Déterminer la fonction de répartition de W et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire W.
(b) Vérifier que la probabilité que X prenne des valeurs positives est égale à la probabilité que X prenne des valeurs négatives.

On suppose, dans la suite, que le paramètre λ est inconnu et on souhaite l'estimer en utilisant la loi de Y.
On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère un *échantillon* $Y_1, Y_2, .., Y_n$ de la loi de Y, c'est à dire des variables $Y_1, Y_2, .., Y_n$ définies sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, indépendantes et de même loi que Y.

(6) On considère des réels $x_1, x_2, .., x_n$ strictement positifs, ainsi que la fonction L , à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $]0; +\infty[$ par

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} f_Y(x_k), \qquad \lambda > 0.$$

(a) Exprimer $L(\lambda)$, puis $\ln(L(\lambda))$ en fonction de λ, $x_1, ..., x_n$.

(b) On considère la fonction φ, définie pour tout réel $\lambda > 0$ par

$$\varphi(\lambda) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{=1}^{n} x_k.$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera z et que l'on exprimera en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$. Que peut-on dire de z pour la fonction L?

(7) On pose dorénavant, toujours avec $n \geq 2$,

$$Z_n = \frac{n}{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n}.$$

On admet que Z_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$. La suite $(Z_n)_{n \geqslant 2}$ est appelée *estimateur du maximum de vraisemblance* pour λ.

On admet que la variable aléatoire $\overline{Y}_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ admet pour densité la fonction f_n définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

(a) En remarquant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t = 1$, montrer que Z_n possède une espérance et que

$$E(Z_n) = \frac{n}{n-1}\lambda.$$

(b) Déterminer une variable aléatoire Z_n', fonction simple de Z_n, telle que $E(Z_n') = \lambda$.